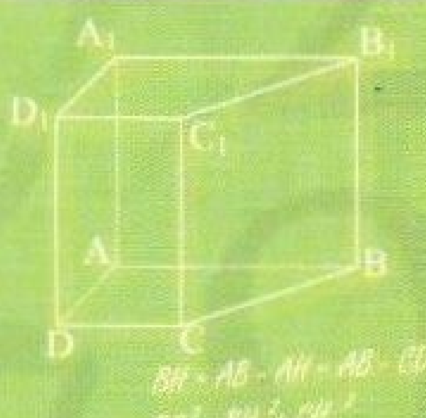
ThS. LÊ ĐỨC

- Bồi dưỡng học sinh khá - giỏi.
- Nâng cao kĩ năng và phương pháp giải các dạng bài tập

Các dạng Toán điển hình

8 ★★



- *Phương trình bậc nhất một ẩn*
- *Bất phương trình bậc nhất một ẩn*
- *Tam giác đồng dạng*
- *Hình lăng trụ đứng - hình chóp đều*



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ThS. LÊ ĐỨC

- Bồi dưỡng học sinh khá - giỏi.
- Nâng cao kĩ năng và phương pháp giải các dạng bài tập

Các dạng Toán điển hình 8★★

- Phương trình bậc nhất một ẩn
- Bất phương trình bậc nhất một ẩn
- Tam giác đồng dạng
- Hình lăng trụ đứng - hình chóp đều

ĐHQG Hà Nội

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội
Điện thoại: Biên tập-Chế bản: (04) 39714896;
Hành chính: (04) 39714899; Tổng biên tập: (04) 39714897
Fax: (04) 39714899
***

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập PHẠM THỊ TRÂM

Biên tập nội dung
PHAN ANH
Sửa bài
LÊ HOÀ
Chế bản
CÔNG TI ANPHA
Trình bày bìa
SƠN KỲ
Đối tác liên kết xuất bản
CÔNG TI ANPHA

SÁCH LIÊN KẾT

CÁC DẠNG TOÁN ĐIỂN HÌNH 8 - TẬP 2
Mã số: 1L-254ĐH2010
In 2.000 cuốn, khổ 16 x 24 cm tại công ti TNHH In Song Nguyên
Số xuất bản:89-2010/CXB/14-03/ĐHQGHN, ngày 15/01/2010
Quyết định xuất bản số: 254LK-TN/XB
In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2010.

GIỚI THIỆU CHUNG

Xin trân trọng giới thiệu tới bạn đọc cuốn sách:

CÁC DẠNG TOÁN ĐIỂN HÌNH TOÁN 8 - TẬP 2

Cuốn sách bao gồm 2 phần với 4 chương:

PHẦN ĐẠI SỐ

Chương I – PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Chương II – BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

PHẦN HÌNH HỌC

Chương III – TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

Chương II – HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG - HÌNH CHÓP ĐỀU

Ở mỗi chương chứa dựng các bài học (chủ đề 1, chủ đề 2, ...) theo nội dung chương trình của sách giáo khoa mới.

Mỗi bài đều được chia thành 4 mục:

A. ***Tóm tắt lí thuyết***: *Trình bày có trật tự nội dung kiến thức liên quan.*

B. ***Phương pháp giải toán (hoặc các ví dụ mẫu)***

Gồm các ví dụ được tuyển chọn có chọn lọc nhằm giúp hoàn thiện kiến thức cơ bản và nâng cao kĩ năng giải Toán.

C. ***Bài tập luyện tập***

D. ***Hướng dẫn – Đáp số***

Như vậy, ở mỗi bài:

1. *Với việc trình bày mục tóm tắt lí thuyết, sẽ giúp các em học sinh hiểu rằng cần phải nắm vững những nội dung gì ?*
2. *Tiếp đó, tới mục phương pháp giải toán, sẽ giúp các em học sinh hoàn thiện kiến thức.*
3. *Đặc biệt là nội dung của các* ***chú ý, nhận xét*** *và* ***yêu cầu*** *sau mỗi ví dụ sẽ giúp các em học sinh củng cố những thiết sót và cách nhìn nhận, đánh giá các vấn đề đặt ra.*

4. *Ngoài ra, còn có rất nhiều ví dụ được giải bằng nhiều cách khác nhauu sẽ giúp các học sinh trở nên linh hoạt trong việc lựa chọn phương pháp giải.*

Chúng tôi cũng xin trân trọng cảm ơn các bạn đồng nghiệp đã nhận lời đọc bản thảo, nhận lời tới dự giờ trong các tiết giảng thử của chúng tôi theo giáo trình này và từ đó đóng góp những nhận xét quý báu để giúp chúng tôi tới ngày hôm nay hoàn thiện được cuốn sách này.

Cuối cùng, cho dù đã rất cố gắng, nhưng thật khó tránh khỏi những thiếu sót bởi những hiểu biết và kinh nghiệm còn hạn chế, rất mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của bạn đọc gần xa.

Mọi ý kiến đóng góp xin liên hệ tới:

- Trung tâm Sách giáo dục Anpha

225C Nguyễn Tri Phương, P.9, Q.5, Tp. HCM.

- Công ti Sách - thiết bị giáo dục Anpha

50 Nguyễn Văn Săng, Quận Tân Phú, Tp.HCM

ĐT: 08.62676463, 38547464.

Email: *alphabookcenter@yahoo.com*

Xin trân trọng cảm ơn!

PHẦN ĐẠI SỐ

CHƯƠNG III – PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

CHỦ ĐỀ 1

MỞ ĐẦU VỀ PHƯƠNG TRÌNH

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

Một phương trình với ẩn x có dạng: $A(x) = B(x)$

trong đó vế trái $A(x)$ và vế phải $B(x)$ là hai biểu thức của cùng một biến x.

☞ *Chú ý*:

- Hệ thức $x = m$ (với m là một số nào đó) cũng là một phương trình. Phương trình này chỉ rõ rằng m là nghiệm duy nhất của nó.
- Một phương trình có thể có một nghiệm, hai nghiệm, ..., nhưng cũng có thể không có nghiệm nào hoặc có vô số nghiệm. Phương trình không có nghiệm nào được gọi là phương trình vô nghiệm.

2. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

Tập hợp tất cả các nghiệm của một phương trình được gọi là *tập nghiệm* của phương trình đó và thường được kí hiệu bởi S.

Khi bài toán yêu cầu *giải một phương trình*, ta phải tìm *tất cả các nghiệm* (hay *tìm tập nghiệm*) của phương trình đó.

3. PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG

Định nghĩa: *Hai phương trình có cùng một tập nghiệm là hai phương trình tương đương.*

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

Ví dụ 1: (Bài 1/tr 6 – Sgk): *Với mỗi phương trình sau, hãy xét xem* $x = -1$ *có là nghiệm của nó không ?*

a. $4x - 1 = 3x - 2$. b. $x + 1 = 2(x - 3)$.

c. $2(x + 1) + 3 = 2 - x$

✍ *Giải*

a. Thay $x = -1$ vào phương trình ta được:

$$4(-1) - 1 = 3(-1) - 2 \Leftrightarrow -5 = -5 \text{ (luôn đúng)}.$$

Vậy, ta thấy $x = -1$ là nghiệm của phương trình.

b. Thay $x = -1$ vào phương trình ta được:

$$(-1) + 1 = 2(-1 - 3) \Leftrightarrow 0 = -8 \text{ (mâu thuẫn)}.$$

Vậy, ta thấy $x = -1$ không phải là nghiệm của phương trình.

c. Thay x = −1 vào phương trình ta được:

$$2(-1+1)+3 = 2-(-1) \Leftrightarrow 3 = 3 \text{ (luôn đúng)}.$$

Vậy, ta thấy x = −1 là nghiệm của phương trình.

Ví dụ 2: *Giải phương trình*: $x^2 - 4 = 5$.

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1: Biến đổi phương trình như sau:

$$x^2 - 4 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 9 = 3^2 \Leftrightarrow x = 3 \text{ hoặc } x = -3.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm x = 3 hoặc x = −3.

Cách 2: Biến đổi phương trình như sau:

$$x^2 - 4 = 5 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3=0 \\ x+3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 3 \text{ hoặc } x = -3.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm x = 3 hoặc x = −3.

Nhận xét: Qua lời giải trên ta nhận thấy:

1. Phương trình: $x^2 = a^2 \Leftrightarrow x = \pm a$.
2. Phương trình: $A.B = 0 \Leftrightarrow A = 0$ hoặc $B = 0$ hoặc viết $\left[\begin{array}{l} A=0 \\ B=0 \end{array}\right.$.

Ví dụ 3: *Tìm tập hợp nghiệm của các phương trình sau*:

a. $(x-2)(x+2) = x^2 - 4$.

b. $\dfrac{1}{x-1} = 0$.

c. $|x| = -\dfrac{1}{2}$.

d. $2x + 2 = 2x + 3$.

Giải

a. Biến đổi tương đương phương trình về dạng:

$$(x-2)(x+2) = x^2 - 4 \Leftrightarrow x^2 - 4 = x^2 - 4, \text{ luôn đúng với mọi x.}$$

Vậy, phương trình có tập hợp nghiệm S = **R**.

b. Nhận xét rằng: VT ≠ 0, với mọi x ≠ 1do đó phương trình vô nghiệm.

Vậy, phương trình có tập hợp nghiệm S = ∅.

c. Nhận xét rằng:

$VT = |x| \ge 0$, với mọi x,

$VP = -\dfrac{1}{2}$, luôn âm,

do đó phương trình vô nghiệm. Vậy, phương trình có tập hợp nghiệm S = ∅.

d. Nhận xét rằng:

VT = 2x + 2 < 2x + 3 = VP, do đó phương trình vô nghiệm.

Vậy, phương trình có tập hợp nghiệm S = ∅.

☞ *Nhận xét*: Qua ví dụ trên, chúng ta nhận thấy:

1. Ở câu a), bằng việc ***dánh giá*** được VT = VP với mọi x, chúng ta đã đưa ra kết luận " *Phương trình có tập hợp nghiệm* S = **R** ". Tuy nhiên, trong nhiều trường hợp cho dù có được VT = VP nhưng lại không thể kết luận được như vậy, thí dụ: $\frac{x+1}{x^2-1} = \frac{1}{x-1}$.

   Ta cũng có: $VT = \frac{x+1}{x^2-1} = \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x-1} = VP$

   và trong trường hợp này ta lại kết luận " *Phương trình có tập hợp nghiệm* $S = \mathbf{R}\backslash\{-1, 1\}$ " – Các em học sinh hãy thử lí giải vì sao ?
2. Ở câu b), bằng việc ***dánh giá*** được VT ≠ 0 với mọi x ≠ 1, chúng ta đã đưa ra kết luận " *Phương trình có tập hợp nghiệm* S = ∅ ".
3. Ở câu c), bằng việc ***dánh giá*** được VT ≥ 0 và VP < 0 với mọi x, chúng ta đã đưa ra kết luận " *Phương trình có tập hợp nghiệm* S = ∅ ".
4. Ở câu d), bằng việc ***dánh giá*** được VT < VP với mọi x, chúng ta đã đưa ra kết luận " *Phương trình có tập hợp nghiệm* S = ∅ ".
5. Cả 4 câu a), b), c), d) đã cho chúng ta làm quen được với việc " *Sử dụng phương pháp đánh giá để giải phương trình* ".

Ví dụ 4: *Chứng minh rằng phương trình* $x + |x| = 0$ *nghiệm đúng với mọi* $x \le 0$.

✍ *Giải*

Nhận xét rằng, với $x \le 0$ ta luôn có: $|x| = -x$ do đó:

$$x + |x| = x - x = 0.$$

Vậy, phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \le 0$.

Ví dụ 5: *Cho phương trình*: $mx - 3 = 2m - x - 1$.

Chứng tỏ rằng phương trình luôn nhận x = 2 *làm nghiệm, dù* m *lấy bất cứ giá trị nào.*

✍ *Giải*

Với x = 2, ta được:

$VT = m.2 - 3 = 2m - 3,$

$VP = 2m - 2 - 1 = 2m - 3,$

suy ra: VT = VP.

Vậy, phương trình luôn nhận x = 2 làm nghiệm, dù m lấy bất cứ giá trị nào.

Ví dụ 6: *Cho phương trình*: $(m^2 - 3m + 2)x^2 = m - 1$, với m là tham số.

Chứng minh rằng:

a. *Với* m = 1, *phương trình nghiệm đúng với mọi* x.

b. *Với* m = 0, *phương trình vô nghiệm.*

c. *Với* m = 3, *phương trình nhận* x = 1 *và* x = – 1 *làm nghiệm.*

✍ *Giải*

a. Với m = 1, phương trình có dạng: $(1^2 - 3.1 + 2)x^2 = 1 - 1 \Leftrightarrow 0x = 0$ do đó, phương trình nghiệm đúng với mọi x.

b. Với m = 0, phương trình có dạng: $(0^2 - 3.0 + 2)x^2 = 0 - 1 \Leftrightarrow 2x^2 = -1$

Nhận xét rằng: VT ≥ 0; VP $= -1 < 0$ nên phương trình vô nghiệm.

c. Với m = 3, phương trình có dạng:

$(3^2 - 3.3 + 2)x^2 = 3 - 1 \Leftrightarrow 2x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

do đó, phương trình nhận x = 1 và x = − 1 làm nghiệm.

Vấn đề 2: HAI PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG

Ví dụ 1: *Hai phương trình sau có tương đương không ? Vì sao ?*

$$x - 2 = 0, \quad (1)$$

$$x + 1 = 3. \quad (2)$$

✍ *Giải*

Giải phương trình (1), ta được: $x = 2 \Rightarrow S_1 = \{2\}$.

Giải phương trình (2), ta được: $x = 2 \Rightarrow S_2 = \{2\}$.

Vậy, ta thấy $S_1 = S_2$ do đó hai phương trình đã cho tương đương với nhau.

☞ ***Nhận xét***:

1. Như vậy, để xét tính tương đương của hai phương trình đã cho, trong lời giải trên chúng ta đi giải từng phương trình rồi thực hiện phép so sánh hai tập nghiệm, và ở đây vì $S_1 = S_2$ chúng ta kết luận "*Hai phương trình tương đương*".
2. Nếu $S_1 = S_2 = \varnothing$ thì hai phương trình cũng tương đương, do đó "*Hai phương trình vô nghiệm cũng tương đương với nhau*".

Ví dụ 2: *Chứng tỏ rằng cặp phương trình sau là tương đương*:

$$\frac{4x^2 - 9}{2x + 3} = 0, \quad (1)$$

$$2x - 3 = 0. \quad (2)$$

✍ *Giải*

Nghiệm của phương trình (1) là các giá trị của x thoả mãn

$$\begin{cases} 4x^2 - 9 = 0 \\ 2x + 3 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x+3)(2x-3) = 0 \\ 2x + 3 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2x - 3 = 0$$

đó chính là phương trình (2).

Vậy, hai phương trình đã cho tương đương.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, trong lời giải trên để chứng tỏ hai phương trình tương đương với nhau chúng ta sử dụng cách biến đổi tương đương một phương trình về phương trình còn lại.

Ví dụ 3: *Hai phương trình sau có tương đương không ? Vì sao ?*

$$x + 1 = 2, \quad (1)$$

$$x^2 - 8x + 15 = 0. \quad (2)$$

✍ *Giải*

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Giải phương trình (1), ta được: $x = 1 \Rightarrow S_1 = \{1\}$.

Giải phương trình (2), ta được:

$x^2 - 8x + 15 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 8x + 16) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 4)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 4 - 1)(x - 4 + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 5)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 5$ hoặc $x = 3 \Rightarrow S_2 = \{5, 3\}$

Vậy, ta thấy $S_1 \neq S_2$ do đó hai phương trình không tương đương.

Cách 2: Giải phương trình (1), ta được: $x = 1 \Rightarrow S_1 = \{1\}$.

Thay $x = 1$ vào phương trình (2), ta được: $1^2 - 8.1 + 15 = 0 \Leftrightarrow 8 = 0$, mâu thuẫn tức là, $x = 1$ không phải là nghiệm của (2).

Vậy, hai phương trình không tương đương.

☞ ***Nhận xét***:

1. Như vậy, để xét tính tương đương của hai phương trình đã cho, trong lời giải trên chúng ta đi giải phương trình (1) rồi nhận xét rằng $x = 1$ không phải là nghiệm của (2) từ đó kết luận " *Hai phương trình tương đương* ". Sở dĩ chúng ta lựa chọn hướng làm như vậy là bởi việc giải phương trình (2) là khó khăn.
2. Như vậy, để chứng tỏ hai phương trình không tương đương, ta có thể lựa chọn một trong hai cách:

   Cách 1: Tìm tập hợp nghiệm của mỗi phương trình, rồi đưa ra nhận xét về hai tập hợp này.

   Cách 2: Chỉ ra một giá trị của ẩn là nghiệm của phương trình này nhưng không là nghiệm của phương trình kia.

Ví dụ 7: *Cho hai phương trình*:

$$x^2 - 3x + 2 = 0, \quad (1)$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 0. \quad (2)$$

a. *Chứng minh rằng hai phương trình có nghiệm chung* $x = 1$.

b. *Chứng minh rằng* $x = 2$ *là nghiệm của* (1) *nhưng không là nghiệm của* (2).

c. *Chứng minh rằng* $x = \frac{3}{2}$ *là nghiệm của* (2) *nhưng không là nghiệm của* (1).

d. *Hai phương trình đã cho có tương đương với nhau hay không ? Vì sao ?*

✍ *Giải*

a. Với $x = 1$, ta được:

$1^2 - 3.1 + 2 = 0$, do đó $x = 1$ là nghiệm của (1).

$2.1^2 - 5.1 + 3 = 0$, do đó $x = 1$ là nghiệm của (2).

Vậy, hai phương trình có nghiệm chung $x = 1$.

b. Với $x = 2$, ta được:

$2^2 - 3.2 + 2 = 0$, do đó $x = 2$ là nghiệm của (1).

$2.2^2 - 5.2 + 3 = 1$, do đó $x = 2$ không là nghiệm của (2).

Vậy, $x = 2$ là nghiệm của (1) nhưng không là nghiệm của (2).

c. *Thực hiện tương tự câu b).*

d. Ta có ngay kết luận hai phương trình không tương đương vì "*$x = 2$ là nghiệm của (1) nhưng không là nghiệm của (2)*".

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho phương trình: $x^2 - 4 = 0$.

Cho biết các khẳng định sau là đúng hay sai ?

a. 2 là nghiệm của phương trình.

b. $\{2\}$ là tập hợp nghiệm của phương trình.

Bài 2: Cho phương trình: $x^2 = 2x$.

a. 0 là nghiệm của phương trình.

b. $\{0\}$ là tập hợp nghiệm của phương trình.

Bài 3: Tìm nghiệm của các phương trình sau:

a. $2x - 1 = 2$.

b. $x(x - 4) = 0$.

c. $x^2 = 16$.

d. $2(x - 3) = 2x - 6$.

e. $\dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$.

f. $|x| = -x$.

Bài 4: Tìm tập nghiệm của phương trình $\sqrt{2x} + \sqrt{-x} = 1$.

Bài 5: Chứng minh rằng phương trình $x - |x| = 0$ nghiệm đúng với mọi $x \geq 0$.

Bài 6: Chứng tỏ rằng phương trình $2mx - 1 = 2m + x - 2$ luôn nhận $x = 1$ làm nghiệm, dù m lấy bất cứ giá trị nào.

Bài 7: Cho phương trình: $(m^2 - 5m + 6)x^2 = m - 2$, với m là tham số.

Chứng minh rằng:

a. Với $m = 2$, phương trình nghiệm đúng với mọi x.

b. Với $m = 3$, phương trình vô nghiệm.

c. Với $m = 0$, phương trình vô nghiệm.

d. Với $m = 4$, phương trình nhận $x = 1$ và $x = -1$ làm nghiệm.

Bài 8: Cho hai phương trình: $x^2 - 4x + 3 = 0$, (1)

$3x^2 - 5x + 2 = 0$. (2)

a. Chứng minh rằng hai phương trình có nghiệm chung $x = 1$.

b. Chứng minh rằng $x = 3$ là nghiệm của (1) nhưng không là nghiệm của (2).

c. Chứng minh rằng $x = \dfrac{2}{3}$ là nghiệm của (2) nhưng không là nghiệm của (1).

d. Hai phương trình đã cho có tương đương với nhau hay không ? Vì sao ?

Bài 9: Các cặp phương trình sau có tương đương không ? Vì sao ?

a. $x - 2 = 2$ và $2x - 1 = 7$. b. $x + 1 = 0$ và $x^2 - 1 = 0$.

c. $2x + 3 = 0$ và $4x^2 + 12x + 9 = 0$. d. $|x| = 2$ và $x^2 = 4$.

e. $2x^2 + 1 = 0$ và $x^2 + 1 = 0$.

Bài 10: Hãy tìm giá trị của hằng số a biết rằng x = 1 là một nghiệm của phương trình:

$$(3x - a)(x + 1) - (x + 2)^2 = 1.$$

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1:

a. "*2 là nghiệm của phương trình* "là câu trả lời đúng, bởi khi thay 2 vào phương trình ta được: $2^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow 4 - 4 - 0$, luôn đúng.

b. "*{2} là tập hợp nghiệm của phương trình*" là câu trả lời đúng, bởi ngoài 2 ra phương trình còn có nghiệm x = – 2.

Nếu với yêu cầu "*Sửa lại cho đúng* "thì ta viết "*{2, – 2} là tập hợp nghiệm của phương trình* ".

Bài 2: *Học sinh tự làm* – Tham khảo bài tập 1.

Bài 3:

a. $x = \frac{3}{2}$. b. x = 0, x = 4. c. $x = \pm 4$. d. Mọi x. e. Mọi $x \neq 1$. f. Mọi $x \leq 0$.

Bài 4: $S = \varnothing$.

Bài 5: Nhận xét rằng, với $x \geq 0$ ta luôn có $|x| = x$ do đó: $x - |x| = x - x = 0$.

Vậy, phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \geq 0$.

Bài 9.

a. Nhận thấy rằng:

- Phương trình $x - 2 = 2$ có tập nghiệm $S_1 = \{4\}$.
- Phương trình $2x - 1 = 7$ có tập nghiệm $S_2 = \{4\}$.

Vậy, hai phương trình tương đương.

b. Nhận thấy rằng:

- x = 1 là nghiệm của phương trình $x^2 - 1 = 0$.
- x = 1 không là nghiệm của phương trình x + 1 = 0.

Vậy, hai phương trình không tương đương.

c. Nhận thấy rằng phương trình $4x^2 + 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow (2x + 3)^2 = 0 \Leftrightarrow 2x + 3 = 0$ đó chính là phương trình còn lại.

Vậy, hai phương trình tương đương.

d. Nhận thấy rằng phương trình $|x| = 2 \Leftrightarrow x^2 = 4$ đó chính là phương trình còn lại. Vậy, hai phương trình tương đương.

e. Nhận thấy rằng:

- Phương trình $2x^2 + 1 = 0$ có tập nghiệm $S_1 = \{\varnothing\}$.
- Phương trình $x^2 + 1 = 0$ có tập nghiệm $S_2 = \{\varnothing\}$.

Vậy, hai phương trình tương đương.

Bài 10. Vì x = 1 là nghiệm của phương trình nên:

$$(3.1 - a)(1 + 1) - (1 + 2)^2 = 1 \Leftrightarrow 2(3 - a) - 3^2 = 1 \Leftrightarrow 6 - 2a - 9 = 1 \Leftrightarrow a = -2.$$

Vậy, với a = – 2 thoả mãn điều kiện đầu bài.

CHỦ ĐỀ 2

PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. HAI QUY TẮC BIẾN ĐỔI PHƯƠNG TRÌNH

Quy tắc chuyển vế: *Trong một phương trình, ta có thể chuyển một hạng tử từ vế này sang vế kia và đổi dấu hạng tử đó.*

Quy tắc nhân với một số: *Trong một phương trình, ta có thể nhân (hoặc chia) cả hai vế với cùng một số khác 0.*

2. ĐỊNH NGHĨA PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Định nghĩa: *Phương trình:*

$ax + b = 0$, *với* a *và* b *là hai số đã cho và* $a \neq 0$,

được gọi là phương trình bậc nhất một ẩn.

Phương trình bậc nhất một ẩn được giải như sau:

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}.$$

Vậy, phương trình luôn có nghiệm duy nhất $x = -\frac{b}{a}$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: ĐIỀU KIỆN ĐỂ MỘT PHƯƠNG TRÌNH LÀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Ví dụ 1: (Bài 7/tr 10 – Sgk): *Hãy chỉ ra các phương trình bậc nhất trong các phương trình sau*:

a. $1 + x = 0$.

b. $x + x^2 = 0$.

c. $1 - 2t = 0$.

d. $3y = 0$.

e. $0x - 3 = 0$.

✍ *Giải*

a. Phương trình $1 + x = 0$ là phương trình bậc nhất với ẩn x vì nó có dạng $ax + b = 0$ với $a = 1$ và $b = 1$.

b. Phương trình $x + x^2 = 0$ không phải là phương trình bậc nhất. Đây là một phương trình bậc hai với ẩn x.

c. Phương trình $1 - 2t = 0$ là phương trình bậc nhất ẩn t.

d. Phương trình $3y = 0$ là phương trình bậc nhất ẩn y.

e. Phương trình $0x - 3 = 0$ không phải là phương trình bậc nhất. Vì điều kiện để phương trình $ax + b = 0$ là phương trình bậc nhất là $a \neq 0$.

Ví dụ 2: *Tìm điều kiện của tham số m để phương trình sau là phương trình bậc nhất một ẩn:*

a. $(m^2 - 1)x^2 + mx + 1 = 0$. b. $mx + (m - 1)y + 2 = 0$.

✍ *Giải*

a. Để phương trình là phương trình bậc nhất một ẩn khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m^2 - 1 = 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm 1.$$

Vậy, với m = 1 hoặc m = – 1 phương trình đã cho là phương trình bậc nhất một ẩn x.

b. Để phương trình là phương trình bậc nhất một ẩn có hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nó là phương trình bậc nhất một ẩn x khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Trường hợp 2: Nó là phương trình bậc nhất một ẩn y khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m = 0 \\ m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$$

Kết luận:

- Với m = 1 phương trình đã cho là phương trình bậc nhất một ẩn x.
- Với m = 0 phương trình đã cho là phương trình bậc nhất một ẩn y.

Ví dụ 3: (Bài 6/tr 9 – Sgk): *Tính diện tích* S *của hình thang* ABCD *theo* x *bằng 2 cách*:

Cách 1: *Theo công thức* S = BH × (BC + DA): 2.

Cách 2: $S = S_{ABH} + S_{BCKH} + S_{CKD}$.

Sau đó, sử dụng giả thiết S = 20 để thu được hai phương trình tương đương với nhau. Trong hai phương trình ấy, có phương trình nào là phương trình bậc nhất không?

✍ *Giải*

Theo cách tính thứ nhất, diện tích hình thang là:

$$S_{ABCD} = BH(BC + AD): 2 = x(x + 7 + x + 4): 2$$

$$= x(2x + 11): 2 = \frac{1}{2}x(2x + 11) \text{ (đvdt).} \quad (1)$$

Theo cách tính thứ hai, diện tích hình thang là:

$$S_{ABCD} = S_{AHB} + S_{BCKH} + S_{CKD}$$

$$= \frac{1}{2}.7x + x^2 + \frac{1}{2}.4x = \frac{7x + 2x^2 + 4x}{2} = \frac{2x^2 + 11x}{2} \text{ (đvdt).} \quad (2)$$

Vậy, với S = 20, ta có (1) và (2) tương đương với:

$$20 = \frac{1}{2}x(2x + 11) \Leftrightarrow 40 = 2x^2 + 11x. \qquad (3)$$

Dễ dàng nhận thấy, phương trình (3) là một phương trình bậc hai.

Vậy, trong hai phương trình trên, không có phương trình nào là phương trình bậc nhất.

Vấn đề 2: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Ví dụ 1: *Sử dụng hai quy tắc biến đổi phương trình để giải các phương trình sau:*

a. $2x = 1$. b. $x^2 + x = x^2$.

Giải

a. Sử dụng quy tắc chia với một số, biến đổi phương trình về dạng: $x = \frac{1}{2}$.

Vậy, phương trình có nghiệm $x = \frac{1}{2}$.

b. Sử dụng quy tắc chuyển vế, biến đổi phương trình về dạng:

$$x^2 + x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy, phương trình có nghiệm x = 0.

c. Sử dụng lần lượt các quy tắc, biến đổi phương trình về dạng:

$$3x - x = 8 \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4.$$

Vậy, phương trình có nghiệm x = 4.

Chú ý: Trong các ví dụ tiếp theo chúng ta không cần nhắc tới tên của quy tắc được sử dụng để biến đổi phương trình nữa.

Ví dụ 2: (Bài 8/tr 10 – Sgk): *Giải các phương trình*:

a. $4x - 20 = 0$. b. $2x + x + 12 = 0$.

c. $x - 5 = 3 - x$. d. $7 - 3x = 9 - x$.

Giải

a. Ta có: $4x - 20 = 0 \Leftrightarrow 4x = 20 \Leftrightarrow x = 5$.

b. Ta có: $2x + x + 12 = 0 \Leftrightarrow 3x + 12 = 0 \Leftrightarrow 3x = -12 \Leftrightarrow x = -4$.

c. Ta có: $x - 5 = 3 - x \Leftrightarrow x + x = 3 + 5 \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4$.

d. Ta có: $7 - 3x = 9 - x \Leftrightarrow x - 3x = 9 - 7 \Leftrightarrow -2x = 2 \Leftrightarrow x = -1$.

Ví dụ 3: (Bài 9/tr 10 – Sgk): *Giải các phương trình sau, viết số gần đúng của mỗi nghiệm ở dạng số thập phân bằng cách làm tròn đến hàng phần trăm:*

a. $3x - 11 = 0$. b. $12 + 7x = 0$. c. $10 - 4x = 2x - 3$.

✍ *Giải*

a. Ta có: $3x - 11 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{11}{3} \Leftrightarrow x \approx 3,67$.

b. Ta có: $12 + 7x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{12}{7} \Leftrightarrow x \approx -1,71$.

c. Ta có: $10 - 4x = 2x - 3 \Leftrightarrow 6x = 13 \Leftrightarrow x = \frac{13}{6} \Leftrightarrow x \approx 2,17$.

Ví dụ 4: *Cho phương trình*: $(m^2 - 1)x + 1 = m$.

Giải phương trình trong mỗi trường hợp sau:

a. $m = 1$. b. $m = -1$. c. $m = 0$.

✍ *Giải*

a. Với $m = 1$, phương trình có dạng:

$0.x + 1 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$, luôn đúng với mọi x.

Vậy, với $m = 1$ phương trình nhận mọi x làm nghiệm.

b. Với $m = -1$, phương trình có dạng:

$0.x + 1 = -1 \Leftrightarrow 1 = -1$, mâu thuẫn.

Vậy, với $m = -1$ phương trình vô nghiệm.

c. Với $m = 0$, phương trình có dạng: $-x + 1 = 0 \Leftrightarrow -x = -1 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy, với $m = 0$ phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Tìm điều kiện của tham số m để phương trình sau là phương trình bậc nhất một ẩn:

a. $(m^2 - 4)x^2 + (m - 2)x + 3 = 0$.

b. $(m - 1)x + (m^2 - 1)y + 4 = 0$.

Bài 2: Giải các phương trình sau:

a. $3x - 4 = 0$.

b. $2x + 13 = 0$.

c. $3 - 7x = 0$.

d. $1 + 5x = 0$.

Bài 3: Giải các phương trình sau:

a. $2x + 16 = 0$.

b. $4x + 18 = 0$.

c. $9 - 6x = 0$.

d. $-16 - 8x = 0$.

Bài 4: Cho phương trình: $(m^2 - 4)x - 2 = m$.

Giải phương trình trong mỗi trường hợp sau:

a. $m = 2$. b. $m = -2$. c. $m = 1$.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1:

a. Để phương trình là phương trình bậc nhất một ẩn khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m^2 - 4 = 0 \\ m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 2 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2.$$

Vậy, với $m = -2$ phương trình đã cho là phương trình bậc nhất một ẩn x.

b. Để phương trình là phương trình bậc nhất một ẩn có hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nó là phương trình bậc nhất một ẩn x khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m - 1 \neq 0 \\ m^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$$

Trường hợp 2: Nó là phương trình bậc nhất một ẩn y khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m - 1 = 0 \\ m^2 - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m \neq \pm 1 \end{cases}, \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy, với $m = -1$ phương trình đã cho là phương trình bậc nhất một ẩn x.

Bài 2:

a. $x = \frac{4}{3}$.

b. $x = -\frac{13}{2}$.

c. $x = \frac{3}{7}$.

d. $x = -\frac{1}{5}$.

Bài 3:

a. $x = -8$.

b. $x = -\frac{9}{2}$.

c. $x = \frac{3}{2}$.

d. $x = -2$.

Bài 4:

a. Với $m = 2$, phương trình có dạng: $0.x - 2 = 2 \Leftrightarrow 0 = 4$, mâu thuẫn.

Vậy, với $m = 2$ phương trình vô nghiệm.

b. Với $m = -2$, phương trình có dạng: $0.x - 2 = -2 \Leftrightarrow -2 = -2$, luôn đúng.

Vậy, với $m = -2$ phương trình nhận mọi x làm nghiệm.

c. Với $m = 1$, phương trình có dạng: $(1 - 4)x - 2 = 1 \Leftrightarrow -3x = 3 \Leftrightarrow x = -1$.

Vậy, với $m = 1$ phương trình có nghiệm duy nhất $x = -1$.

CHỦ ĐỀ 3

PHƯƠNG TRÌNH ĐƯA VỀ DẠNG $ax + b = 0$ hoặc $ax = -b$

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Bằng việc sử dụng phép toán bỏ dấu ngoặc hay quy đồng mẫu để biến đổi phương trình ban đầu về dạng $ax + b = 0$ hoặc $ax = -b$.

Bước 2: Giải phương trình nhận được, từ đó kết luận.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: (Bài 10/tr 12 – Sgk): *Tìm chỗ sai và sửa lại các bài giải sau cho đúng:*

a. $3x - 6 + x = 9 - x$.
$\Leftrightarrow 3x + x - x = 9 - 6$
$\Leftrightarrow 3x = 3 \Leftrightarrow x = 1$

b. $2t - 3 + 5t = 4t + 12$.
$\Leftrightarrow 2t + 5t - 4t = 12 - 3$
$\Leftrightarrow 3t = 9 \Leftrightarrow t = 3$

Giải

a. Dễ dàng nhận ra chỗ sai trong lời giải trên. Đó là, khi chuyển vế không đổi dấu. Do đó, ta sửa lại lời giải như sau:

$$3x - 6 + x = 9 - x \Leftrightarrow 3x + x + x = 9 + 6 \Leftrightarrow 5x = 15 \Leftrightarrow x = 3.$$

b. Dễ dàng nhận ra chỗ sai trong lời giải trên. Đó là, khi chuyển vế không đổi dấu. Do đó, ta sửa lại lời giải như sau:

$$2t - 3 + 5t = 4t + 12 \Leftrightarrow 2t + 5t - 4t = 12 + 3 \Leftrightarrow 3t = 15 \Leftrightarrow t = 5.$$

Ví dụ 2: (Bài 11/tr 13 – Sgk): *Giải các phương trình sau:*

a. $3x - 2 = 2x - 3$.

b. $3 - 4u + 24 + 6u = u + 27 + 3u$.

c. $5 - (x - 6) = 4(3 - 2x)$.

d. $-6(1,5 - 2x) = 3(-15 + 2x)$.

e. $0,1 - 2(0,5t - 0,1) = 2(t - 2,5) - 0,7$.

f. $\frac{3}{2}\left(x - \frac{5}{4}\right) - \frac{5}{8} = x$.

Giải

a. Ta có: $3x - 2 = 2x - 3 \Leftrightarrow 3x - 2x = 2 - 3 \Leftrightarrow x = -1$.
Vậy, phương trình có nghiệm $x = -1$.

b. Ta có: $3 - 4u + 24 + 6u = u + 27 + 3u \Leftrightarrow 2u = 0 \Leftrightarrow u = 0$.
Vậy, phương trình có nghiệm $u = 0$.

c. Ta có: $5 - (x - 6) = 4(3 - 2x) \Leftrightarrow 5 - x + 6 = 12 - 8x \Leftrightarrow 7x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{7}$.

Vậy, phương trình có nghiệm $x = \frac{1}{7}$.

d. Ta có: $-6(1,5-2x) = 3(-15+2x) \Leftrightarrow -9 + 12x = -45 + 6x$

$\Leftrightarrow 6x = -36 \Leftrightarrow x = -6.$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = -6$.

e. Ta có: $0,1 - 2(0,5t - 0,1) = 2(t-2,5) - 0,7 \Leftrightarrow 0,1 - t + 0,2 = 2t - 5 - 0,7$

$\Leftrightarrow -t - 2t = -5,7 - 0,3 \Leftrightarrow -3t = -6 \Leftrightarrow t = 2.$

Vậy, phương trình có nghiệm $t = 2$.

f. Ta có: $\frac{3}{2}\left(x - \frac{5}{4}\right) - \frac{5}{8} = x \Leftrightarrow \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}.\frac{5}{4} - \frac{5}{8} = x \Leftrightarrow \frac{3}{2}x - \frac{15}{8} - \frac{5}{8} = x$

$\Leftrightarrow \frac{12}{8}x - \frac{20}{8} = \frac{8}{8}x \Leftrightarrow 4x = 20 \Leftrightarrow x = 5.$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 5$.

Ví dụ 1: *Giải phương trình*: $\frac{x-2}{3} + \frac{x-2}{4} = \frac{x-2}{5} + \frac{x-2}{6}$.

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{x-2}{3} + \frac{x-2}{4} - \frac{x-2}{5} - \frac{x-2}{6} = 0 \Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) = 0$$

$\Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Nhận xét:

1. Trong lời giải trên, ta không máy móc quy đồng mẫu thức hai vế rồi khử mẫu thức, bởi xuất phát từ nhận xét về nhân tử chung $x - 2$, điều này sẽ giúp giảm đáng kể độ phức tạp trong lời giải.
2. Quá trình biến đổi phương trình có thể dẫn đến trường hợp đặc biệt là hệ số của ẩn bằng 0. Khi đó, phương trình có thể vô nghiệm hoặc nghiệm đúng với mọi x, thí dụ:
   - Phương trình:

     $2x + 1 = 2x - 1 \Leftrightarrow 2x - 2x = -1 - 1 \Leftrightarrow 0 = -2$

     $\Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm.
   - Phương trình:

     $x + 2 = x + 2 \Leftrightarrow x - x = 2 - 2 \Leftrightarrow 0 = 0$

     $\Rightarrow$ Phương trình nghiệm đúng với mọi x.

Ví dụ 3: (Bài 12/tr 13 – Sgk): *Giải các phương trình sau*:

a. $\frac{5x-2}{3} = \frac{5-3x}{2}$.

b. $\frac{10x+3}{12} = 1 + \frac{6+8x}{9}$.

c. $\frac{7x-1}{6} + 2x = \frac{16-x}{5}$.

d. $4(0,5-1,5x) = -\frac{5x-6}{3}$.

Giải

a. Ta có: $\frac{5x-2}{3}=\frac{5-3x}{2} \Leftrightarrow \frac{2(5x-2)}{6}=\frac{3(5-3x)}{6}$

$\Leftrightarrow 10x - 4 = 15 - 9x \Leftrightarrow 19x = 19 \Leftrightarrow x = 1.$

Vậy, phương trình có nghiệm x = 1.

b. Ta có: $\frac{10x+3}{12}=1+\frac{6+8x}{9} \Leftrightarrow \frac{3(10x+3)}{36}=\frac{36}{36}+\frac{4(6+8x)}{36}$

$\Leftrightarrow 30x + 9 = 36 + 24 + 32x \Leftrightarrow 2x = 51 \Leftrightarrow x = \frac{51}{2}.$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = \frac{51}{2}$.

c. Ta có: $\frac{7x-1}{6}+2x=\frac{16-x}{5} \Leftrightarrow \frac{5(7x-1)}{30}+\frac{30.2x}{30}=\frac{6(16-x)}{30}$

$\Leftrightarrow 35x - 5 + 60x = 96 - 6x \Leftrightarrow 101x = 101 \Leftrightarrow x = 1.$

Vậy, phương trình có nghiệm x = 1.

d. Ta có: $4(0,5-1,5x)=-\frac{5x-6}{3} \Leftrightarrow \frac{3(2-6x)}{3}=-\frac{5x-6}{3}$

$\Leftrightarrow 6 - 18x = -5x + 6 \Leftrightarrow 13x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

Vậy, phương trình có nghiệm x = 0.

Ví dụ 4: *Giải phương trình*: $(3x-4)(2x+1)-(6x+5)(x-3)=3.$ (1)

Giải

Để tránh phải ghi lại nhiều lần, ta đi biến đổi riêng VT:

$VT = 6x^2 + 3x - 8x - 4 - 6x^2 + 18x - 5x + 15 = 8x + 11.$

Khi đó, phương trình (1) có dạng: $8x + 11 = 3 \Leftrightarrow 8x = -8 \Leftrightarrow x = -1.$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = -1$.

Ví dụ 5: (Bài 13/tr 13 – Sgk): Bạn Hoà giải một phương trình như sau:

$x(x + 2) = x(x + 3)$

$\Leftrightarrow x + 2 = x + 3$ (1)

$\Leftrightarrow x - x = 3 - 2$ (2)

$\Leftrightarrow 0x = 1$ (vô nghiệm) (3)

Theo em bạn Hoà giải đúng hay sai? Em sẽ giải phương trình đó như thế nào?

Giải

Bạn Hoà đã giải sai ngay ở bước (1). Vì bạn đã chia cả hai vế cho x mà không quan tâm đến x bằng 0 hay khác 0.

Ta chỉ nhận được một phương trình mới tương đương với phương trình đã cho khi chia cả hai vế cho một số khác 0.

Do đó, ta có thể giải lại phương trình như sau:

$x(x + 2) = x(x + 3) \Leftrightarrow x^2 + 2x = x^2 + 3x$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - (x^2 + 3x) = 0 \Leftrightarrow -x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 0$.

Ví dụ 6: (Bài 15/tr 13 – Sgk): *Một xe máy khởi hành từ Hà Nội đi Hải Phòng với vận tốc trung bình* 32km/h. *Sau đó* 1 giờ, *một ôtô cũng khởi hành từ Hà Nội đi Hải Phòng, cùng đường với xe máy và với vận tốc trung bình* 48km/h. *Hãy viết phương trình biểu thị việc ôtô gặp xe máy sau* x giờ, *kể từ khi ôtô khởi hành.*

✍ *Giải*

Gọi x là thời gian ôtô đã chạy cho tới lúc gặp xe máy ($x > 1$, đơn vị: giờ).

Vì xe máy đi trước ôtô 1 giờ nên thời gian xe máy đã đi cho đến lúc gặp ôtô là $x + 1$ (giờ).

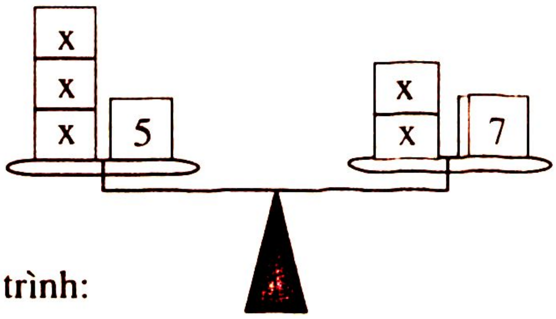
Quãng đường xe máy đã đi cho đến lúc gặp ôtô là $32(x + 1)$ (km).

Quãng đường ôtô đã đi cho đến lúc gặp xe máy là $48x$ (km).

Vì quãng đường đi từ Hà Nội cho tới chỗ gặp nhau của hai xe là như nhau nên ta có phương trình: $32(x + 1) = 48x \Leftrightarrow 32x + 32 = 48x \Leftrightarrow 16x = 32 \Leftrightarrow x = 2$.

Ví dụ 7: (Bài 16/tr 13 – Sgk): *Viết phương trình biểu thị cân thăng bằng trong hình bên (đơn vị khối lượng là gam).*

✍ *Giải*



Ta có:

- Khối lượng đặt trên đĩa cân bên trái là: $3x + 5$ (gam).
- Khối lượng đặt trên đĩa cân bên phải là: $2x + 7$ (gam).

Vì cân ở vị trí cân bằng nên ta có phương trình:

$3x + 5 = 2x + 7.$

Ví dụ 8: (Bài 19/tr 14 – Sgk): *Viết phương trình ẩn* x *rồi tính* x (mét) *trong mỗi hình sgk* (S *là diện tích của hình*).

✍ *Giải*

a. Ta có: $9(2x + 2) = 144 \Leftrightarrow 18x + 18 = 144 \Leftrightarrow x = 7$.

b. Ta có: $6x + 15 = 75 \Leftrightarrow 6x = 75 - 15 \Leftrightarrow 6x = 60 \Leftrightarrow x = 10$.

c. Ta có: $12x + 24 = 168 \Leftrightarrow 12x = 168 - 24 \Leftrightarrow 12x = 24 \Leftrightarrow x = 2$.

Ví dụ 9: (Bài 20/tr 14 – Sgk): *Trung bảo Nghĩa hãy nghĩ ở trong đầu một số tự nhiên tuỳ ý, sau đó Nghĩa thêm 5 vào số đó, nhân tổng nhận được với 2, được bao nhiêu đem trừ đi 10, tiếp tục nhân hiệu tìm được với 3 rồi cộng thêm 66, cuối cùng chia kết quả cho 6. Chẳng hạn, nếu Nghĩa nghĩ đến số 7 thì quá trình tính toán sẽ là:*

$7 \to (7 + 5 = 12) \to (12 \times 2 = 24) \to (24 - 10 = 14)$

$\to (14 \times 3 = 42) \to (42 + 66 = 108) \to (108 : 6 = 18).$

Trung chỉ cần biết kết quả cuối cùng (số 18) là đoán ngay được số Nghĩa đã nghĩ là số nào.

Nghĩa thử mấy lần, Trung đều đoán đúng. Nghĩa phục tài Trung lắm. Đố em tìm ra bí quyết của Trung đấy!

Giải

Gọi x là số Nghĩa nghĩ ra thì biểu thức biểu diễn kết quả là:

$\{3[2(x+5)-10]+66\}:6 = x+11$.

Trung chỉ việc lấy kết quả cuối cùng mà Nghĩa cho biết trừ đi 11 là được mà số Nghĩa đã nghĩ.

Bí quyết của Trung là yêu cầu Nghĩa làm những phép tính có vẻ rắc rối nhưng thật ra Trung chỉ thực hiện một phép tính đơn giản là có ngay kết quả.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Giải các phương trình:

a. $4x + 1 = 6x - 13$.

b. $5 - 3x = 6x + 7$.

c. $15 - 8x = 9 - 5x$.

d. $9 - 2x = x + 1$.

Bài 2: Giải các phương trình:

a. $2(x-2) + 3 = 1 - 2(x+1)$.

b. $2(x-3) + 1 = 2(x+1) - 9$.

c. $3(x+1)(x-1) - 5 = 3x^2 + 2$.

d. $x^3 + 2(x-1)^2 - 2(x-1)(x+1) = x^3 + x - 4 - (x-7)$.

Bài 3: Giải các phương trình:

a. $2x - \frac{1}{2} = \frac{2x+1}{4} - \frac{1-2x}{8}$.

b. $\frac{x+4}{3} - 2x + 1 = \frac{x}{2} - \frac{x+2}{3}$.

c. $\frac{2x+0,3}{2} - \frac{2x-1,5}{3} = \frac{2x-2,5}{12}$.

d. $\frac{x-3}{13} + \frac{x-3}{14} = \frac{x-3}{15} + \frac{x-3}{16}$.

Bài 4: Giải các phương trình:

a. $-\frac{x-1}{12} + \frac{x+3}{6} = 8 + \frac{2x+1}{15}$.

b. $x + \frac{x-1}{3} = 2 - \frac{2x+1}{2} + \frac{x+2}{5}$.

c. $\frac{3x+2}{12} - \frac{x}{4} = \frac{x+5}{6} - \frac{2x-3}{3}$.

d. $\frac{1}{2}(2x-1) + \frac{1}{4}(x-3) = 1 - \frac{1}{6}(3x+2)$.

Bài 5: Giải các phương trình:

a. $\frac{x-2}{7} + \frac{x-1}{8} = \frac{x-4}{5} + \frac{x-3}{6}$.

b. $\frac{x+1}{15} + \frac{x+2}{14} = \frac{x+3}{13} + \frac{x+4}{14}$.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1:

a. $x = 7$.

b. $x = -\frac{2}{9}$.

c. $x = 2$.

d. $x = \frac{8}{3}$.

Bài 2:

a. Nhận mọi x làm nghiệm.

b. Vô nghiệm.

c. Nhận mọi x làm nghiệm.

d. $x = 1$.

Bài 3:

a. Bằng cách quy đồng mẫu số theo vế ta biến đổi phương trình:

$$\frac{1}{2}(4x-1)=\frac{1}{8}(6x+1)\Leftrightarrow 4(4x-1)=6x+1\Leftrightarrow 10x=5\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x=\frac{1}{2}$.

b. Bằng cách quy đồng mẫu số theo vế ta biến đổi phương trình:

$$\frac{1}{3}(-5x+7)=\frac{1}{6}(x-4)\Leftrightarrow -10x+14=x-4\Leftrightarrow 11x=18\Leftrightarrow x=\frac{18}{11}$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x=\frac{18}{11}$.

c. $x=-\frac{103}{20}$.

d. Viết lại phương trình dưới dạng: $(x-3)\left(\frac{1}{13}+\frac{1}{14}-\frac{1}{15}-\frac{1}{16}\right)=0\Leftrightarrow x-3=0\Leftrightarrow x=3.$

Vậy, phương trình có nghiệm $x=3$.

Bài 4:

a. Bằng cách quy đồng mẫu số theo vế ta biến đổi phương trình:

$$\frac{1}{12}(7+x)=\frac{1}{15}(121+2x)\Leftrightarrow 3x=-449\Leftrightarrow x=-\frac{449}{3}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x=-\frac{449}{3}$.

b. Bằng cách quy đồng mẫu số theo vế ta biến đổi phương trình:

$$\frac{1}{3}(4x-1)=\frac{1}{10}(19-8x)\Leftrightarrow 64x=67\Leftrightarrow x=\frac{67}{64}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x=\frac{67}{64}$.

c. Bằng cách quy đồng mẫu số theo vế ta biến đổi phương trình:

$$\frac{1}{6}=-\frac{1}{6}(3x-11)\Leftrightarrow 10x=3\Leftrightarrow x=\frac{10}{3}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x=\frac{10}{3}$.

d. Bằng cách quy đồng mẫu số theo vế ta biến đổi phương trình:

$$\frac{5}{4}(x-1)=\frac{1}{6}(4-3x)\Leftrightarrow 21x=23\Leftrightarrow x=\frac{23}{21}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x=\frac{23}{21}$.

Bài 5:

a. $x=9$. b. $x=-\frac{419}{14}$.

PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Ta sử dụng kết quả: $A(x).B(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A(x) = 0 \\ B(x) = 0 \end{array}\right.$.

Mở rộng: Với phương trình: $A(x)\,B(x)\,...\,M(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A(x) = 0 \\ B(x) = 0 \\ ... \\ M(x) = 0 \end{array}\right.$.

Lấy các nghiệm của các phương trình trên, ta được nghiệm của phương trình ban đầu.

Như vậy, để giải những phương trình đưa được về dạng tích, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Bằng việc xác định nhân tử chung (hoặc chuyển tất cả các hạng tử sang vế trái, lúc này vế phải bằng 0) ta đưa phương trình ban đầu về dạng tích.

Bước 2: Giải phương trình rồi kết luận.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: (Bài 21/tr 17 – Sgk): *Giải các phương trình sau:*

a. $(3x - 2)(4x - 5) = 0$.

b. $(2{,}3x - 6{,}9)(0{,}1x + 2) = 0$.

c. $(4x + 2)(x^2 + 1) = 0$.

d. $(2x + 7)(x - 5)(5x + 1) = 0$.

✍ *Giải*

a. Ta có: $(3x - 2)(4x - 5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - 2 = 0 \\ 4x - 5 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{2}{3} \\ x = \frac{5}{4} \end{array}\right.$.

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = \frac{2}{3}$, $x = \frac{5}{4}$.

b. Ta có: $(2{,}3x - 6{,}9)(0{,}1x + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2{,}3x - 6{,}9 = 0 \\ 0{,}1x + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -20 \end{array}\right.$.

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 3$, $x = -20$.

c. Ta có: $(4x + 2)(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất $x = -\frac{1}{2}$.

d. Ta có: $(2x+7)(x-5)(5x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+7=0 \\ x-5=0 \\ 5x+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{7}{2} \\ x=5 \\ x=-\frac{1}{5} \end{array}\right.$.

Vậy, phương trình có ba nghiệm $x=-\frac{7}{2}, x=5, x=-\frac{1}{5}$.

☛ ***Chú ý***: Nhiều phương trình ở dạng ban đầu chưa phải là một phương trình tích, khi đó chúng ta cần sử dụng phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử để biến đổi phương trình về dạng tích.

Ví dụ 2: *Giải phương trình*: $2x(x^2+2)=(x-3)(x^2+2)$. (1)

✍ *Giải*

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1: Biến đổi phương trình về dạng:

$$2x(x^2+2)-(x-3)(x^2+2)=0 \Leftrightarrow (x^2+2)(2x-x+3)=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+2)(x+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+2=0 \\ x+3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=-3.$$

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất $x=-3$.

Cách 2: Biến đổi phương trình về dạng:

$$2x^3+4x=x^3+2x-3x^2-6 \Leftrightarrow 2x^3+4x-x^3-2x+3x^2+6=0$$

$$\Leftrightarrow x^3+3x^2+2x+6=0 \Leftrightarrow (x^3+3x^2)+(2x+6)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x+3)+2(x+3)=0 \Leftrightarrow (x+3)(x^2+2)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+2=0 \\ x+3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=-3.$$

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất $x=-3$.

Cách 3: Vì $x^2+2>0$ nên chia cả hai vế của phương trình (1) cho $x^2+2>0$, ta được: $2x=x-3 \Leftrightarrow 2x-x=-3 \Leftrightarrow x=-3$.

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất $x=-3$.

☛ ***Nhận xét***: Như vậy, để giải phương trình đã cho chúng ta đã chỉ ra được ba cách trình bày, cụ thể:

Cách 1: Biến đổi phương trình về dạng tích bằng cách đặt nhân tử chung.

Cách 2: Biến đổi phương trình về dạng tích bằng cách chuyển vế.

Cách 3: Sử dụng quy tắc chia cả hai vế của phương trình cho một số khác 0.

Và ở đó:

1. Cách 2 là quá cồng kềnh do việc chúng ta đã không đánh giá được sự có mặt của nhân tử chung ban đầu là x^2+2.

2. Cách 3 cho lời giải đơn giản hơn, tuy nhiên nếu " *chia cả hai vế của phương trình cho một số chưa khẳng định được đã khác 0* " sẽ dẫn tới hiện tượng mất nghiệm của phương trình. Ví dụ sau sẽ minh hoạ điều này.

Ví dụ 3: *Giải phương trình*: $3x(2x - 3) = 7(2x - 3)$. (1)

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$3x(2x-3) - 7(2x-3) = 0 \Leftrightarrow (2x-3)(3x-7) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-3=0 \\ 3x-7=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{3}{2} \\ x=\frac{7}{3} \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có 2 nghiệm phân biệt là $x = \frac{3}{2}$, $x = \frac{7}{3}$.

Nhận xét:

1. Nếu chia cả hai vế của phương trình (1) cho $(2x - 3)$ thì ta sẽ bị mất một nghiệm $x = \frac{3}{2}$.
2. Có thể giải ví dụ trên bằng cách xét hai trường hợp:

   Trường hợp 1: Nếu $x \neq \frac{3}{2}$ thì $2x - 3 \neq 0$. Chia cả hai vế của (1) cho $2x - 3 \neq 0$ được: $3x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{3}$, thoả mãn $x \neq \frac{3}{2}$.

   Trường hợp 2. Nếu $x = \frac{3}{2}$ thì (1) được nghiệm đúng.

   Kết luận $S = \{\frac{7}{3}, \frac{3}{2}\}$.

Ví dụ 4: (Bài 21/tr 17 – Sgk): *Bằng cách phân tích vế trái thành nhân tử, giải các phương trình sau*:

a. $2x(x - 3) + 5(x - 3) = 0$.
b. $(x^2 - 4) + (x - 2)(3 - 2x) = 0$.
c. $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$.
d. $x(2x - 7) - 4x + 14 = 0$.
e. $(2x - 5)^2 - (x + 2)^2 = 0$.
f. $x^2 - x - (3x - 3) = 0$.

Giải

a. Ta có:

$$2x(x-3) + 5(x-3) = 0 \Leftrightarrow (x-3)(2x+5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3=0 \\ 2x+5=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-\frac{5}{2} \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có các nghiệm $x = 3,\ x = -\frac{5}{2}$.

b. Ta có: $(x^2 - 4) + (x - 2)(3 - 2x) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 2) + (x - 2)(3 - 2x) = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x + 2 + 3 - 2x) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(5 - x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2 = 0 \\ 5 - x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 5 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có các nghiệm $x = 2,\ x = 5$.

c. Ta có: $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy, phương trình có các nghiệm

d. Ta có: $x(2x - 7) - 4x + 14 = 0 \Leftrightarrow x(2x - 7) - 2(2x + 7) = 0$

$$\Leftrightarrow (2x + 7)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + 7 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{7}{2} \\ x = 2 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có các nghiệm $x = -\frac{7}{2},\ x = 2$.

e. Ta có: $(2x - 5)^2 - (x + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow [(2x - 5) - (x + 2)][(2x - 5) + (x + 2)] = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 7)(3x - 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 7 = 0 \\ 3x - 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 7 \\ x = 1 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có các nghiệm $x = 7,\ x = 1$.

f. Ta có: $x^2 - x - (3x - 3) = 0 \Leftrightarrow x(x - 1) - 3(x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có các nghiệm $x = 1,\ x = 3$.

Ví dụ 5: *Giải phương trình*: $(x^3 + x^2) + (x^2 + x) = 0$.

✍ *Giải*

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1: Biến đổi phương trình về dạng:

$$x^2(x + 1) + x(x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x^2 + x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x + 1)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có 2 nghiệm phân biệt là $x = -1,\ x = 0$.

Cách 2: Biến đổi phương trình về dạng:

$$x^3 + x^2 + x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 + 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow x(x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có 2 nghiệm phân biệt là $x = -1,\ x = 0$.

☞ *Nhận xét*: Trong lời giải trên, việc trình bày hai cách giải nhằm mục đích giúp các em học sinh có được phép so sánh, từ đó lựa chọn cho mình phương pháp thích hợp.

Ví dụ 6: *Giải phương trình*: $x^2 - 2x - 3 = 0$.

✍ *Giải*

Trước tiên ta đi phân tích đa thức $x^2 - 2x - 3$ thành nhân tử, để thực hiện công việc này ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: (*Sử dụng phép tách theo B*): Ta có:

$$x^2 - 2x - 3 = x^2 + \underbrace{x - 3x}_{\text{tách } -2x = x - 3x} - 3 = (x^2 + x) - (3x + 3)$$

$$= x(x + 1) - 3(x + 1) = (x + 1)(x - 3).$$

Cách 2: (*Sử dụng phép tách theo A*): Ta có:

$$x^2 - 2x - 3 = \underbrace{3x^2 - 2x^2}_{\text{tách } x^2 = 3x^2 - 2x^2} - 2x - 3 = (3x^2 - 3) - (2x^2 + 2x)$$

$$= 3(x^2 - 1) - 2x(x + 1) = 3(x - 1)(x + 1) - 2x(x + 1)$$

$$= (x + 1)[3(x - 1) - 2x] = (x + 1)(x - 3).$$

Cách 3: (*Sử dụng phép tách theo C*): Ta có:

$$x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x \underbrace{- 2 - 1}_{\text{tách } -3 = -2 - 1} = (x^2 - 1) - (2x + 2)$$

$$= (x - 1)(x + 1) - 2(x + 1) = (x + 1)(x - 1 - 2) = (x + 1)(x - 3).$$

Cách 4: (*Sử dụng phép tách tạo hằng đẳng thức*): Ta có:

$$x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2.x.1 + \underbrace{1 - 4}_{\text{tách } -3 = 1 - 4} = (x - 1)^2 - 4$$

$$= (x - 1 - 2)(x - 1 + 2) = (x - 3)(x + 1).$$

Khi đó, phương trình có dạng: $(x - 3)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 3 \\ x + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Vậy, phương trình có 2 nghiệm phân biệt là $x = 3$, $x = -1$.

☞ *Nhận xét*: Bốn cách phân tích đa thức dạng $ax^2 + bx + c$ thành nhân tử trong lời giải trên đã được trình bày rất chi tiết trong chương I.

Ví dụ 7: (Bài 24/tr 17 – Sgk): *Giải các phương trình*:

a. $(x^2 - 2x + 1) - 4 = 0$. b. $x^2 - x = -2x + 2$.

c. $4x^2 + 4x + 1 = x^2$. d. $x^2 - 5x + 6 = 0$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$(x^2 - 2x + 1) - 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 1 - 2)(x - 1 + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ hoặc } x = -1.$$

Vậy, phương trình có 2 nghiệm $x = 3$, $x = -1$.

b. Ta có: $x^2 - x = -2x + 2 \Leftrightarrow x(x-1) + 2(x-1) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -2$.

Vậy, phương trình có 2 nghiệm $x = 1$, $x = -2$.

c. Ta có:

$4x^2 + 4x + 1 = x^2 \Leftrightarrow (2x+1)^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow (2x + 1 - x)(2x + 1 + x) = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(3x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -\frac{1}{3}$.

Vậy, phương trình có 2 nghiệm $x = 1$, $x = -\frac{1}{3}$.

d. Ta có: $x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = 3$.

Vậy, phương trình có 2 nghiệm $x = 2$, $x = 3$.

Ví dụ 8: (Bài 25/tr 17 – Sgk): *Giải các phương trình*:

a. $2x^3 + 6x^2 = x^2 + 3x$.   b. $(3x-1)(x^2+2) = (3x-1)(7x-10)$.

Giải

a. Ta có: $2x^3 + 6x^2 = x^2 + 3x \Leftrightarrow 2x^2(x+3) - x(x+3) = 0$

$\Leftrightarrow (x+3)(2x^2 - x) = 0 \Leftrightarrow x(x+3)(2x-1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -3$ hoặc $x = \frac{1}{2}$.

Vậy, phương trình có 3 nghiệm $x = 0$, $x = -3$, $x = \frac{1}{2}$.

b. Ta có: $(3x-1)(x^2+2) = (3x-1)(7x-10)$

$\Leftrightarrow (3x-1)(x^2 + 2 - 7x + 10) = 0 \Leftrightarrow (3x-1)(x^2 - 7x + 12) = 0$

$\Leftrightarrow (3x-1)(x^2 - 3x - 4x + 12) = 0 \Leftrightarrow (3x-1)(x-3)(x-4) = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ hoặc $x = 3$ hoặc $x = 4$.

Vậy, phương trình có 3 nghiệm $x = \frac{1}{3}$, $x = 3$, $x = 4$.

Ví dụ 9: *Cho phương trình*: $(x + 1 - 3m)(3x - 5 + 2m) = 0$.

a. *Tìm các giá trị của* m *sao cho một trong các nghiệm của phương trình là* $x = 1$.

b. *Với mỗi* m *vừa tìm được ở câu* a), *hãy giải phương trình đã cho.*

Giải

a. Để phương trình nhận $x = 1$ làm một nghiệm điều kiện là:

$(1 + 1 - 3m)(3.1 - 5 + 2m) = 0 \Leftrightarrow (2 - 3m)(-2 + 2m) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 - 3m = 0 \\ -2 + 2m = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \frac{2}{3} \\ m = 1 \end{array}\right..$$

Vậy, với $m = \frac{2}{3}$ hoặc $m = 1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. Ta lần lượt thực hiện:

- Với $m = \frac{2}{3}$, phương trình có dạng:

$$(x + 1 - 3.\frac{2}{3})(3x - 5 + 2.\frac{2}{3}) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(3x - \frac{11}{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ 3x - \frac{11}{3} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \frac{11}{9} \end{array}\right. .$$

Vậy, với $m = \frac{2}{3}$ phương trình có các nghiệm $x = 1$, $x = \frac{11}{9}$.

- Với $m = 1$, phương trình có dạng:

$$(x + 1 - 3.1)(3x - 5 + 2.1) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(3x - 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2 = 0 \\ 3x - 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 1 \end{array}\right. .$$

Vậy, với $m = 1$ phương trình có các nghiệm $x = 2$, $x = 1$.

Ví dụ 10: *Cho phương trình*: $2x^3 + ax + 3 = 0$. (1)

a. *Biết rằng* $x = -1$ *là một nghiệm của phương trình* (1), *hãy xác định* a.

b. *Với* a *vừa tìm được ở câu* a) *hãy tìm các nghiệm còn lại của phương trình.*

Giải

a. Vì $x = -1$ là một nghiệm của phương trình (1) nên ta được:

$$2(-1)^3 + a(-1) + 3 = 0 \Leftrightarrow -2 - a + 3 = 0 \Leftrightarrow a = 1.$$

Vậy, với $a = 1$ phương trình (1) có một nghiệm là $x = -1$.

b. Với $a = 1$, phương trình (1) có dạng: $2x^3 + x + 3 = 0$. (2)

Để giải phương trình (2) ta cần phân tích đa thức $2x^3 + x + 3$ thành nhân tử, để thực hiện công việc này chúng ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Thực hiện phép phân tích:

$$\begin{aligned} 2x^3 + x + 3 &= 2x^3 + 2 + x + 1 = 2(x^3 + 1) + (x + 1) \\ &= 2(x + 1)(x^2 - x + 1) + (x + 1) \\ &= (x + 1)(2x^2 - 2x + 2 + 1) = (x + 1)(2x^2 - 2x + 3). \end{aligned}$$

Cách 2: Vì $x = -1$ là nghiệm của phương trình nên đa thức $2x^3 + x + 3$ sẽ chia hết cho $x + 1$ (thực hiện phép chia đa thức $2x^3 + x + 3$ cho $x + 1$ ra nháp), từ đó ta được: $2x^3 + x + 3 = (x + 1)(2x^2 - 2x + 3)$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$(x+1)(2x^2-2x+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x+1=0 & (1) \\ 2x^2-2x+3=0 & (2) \end{array}\right.$$

Giải (1), ta được $x = -1$.

Giải (2), ta có nhận xét:

$2x^2 - 2x + 3 = 2(x^2 - x + 1) + 1 > 0 \Rightarrow$ phương trình (2) vô nghiệm.

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất $x = -1$.

☞ ***Nhận xét***: Trong lời giải trên, việc việc phân tích đa thức $2x^2 + x + 3$ thành nhân tử được trình bày hai cách, ở đó:

Cách 1: Việc thực hiện là tương đối tự phát, nó được dựa trên kinh nghiệm trong việc phân tích đa thức thành nhân tử.

Cách 2: Chúng ta đã tận dụng được giả thiết cho $x = -1$ là nghiệm của phương trình. Ta có kết quả tổng quát sau:

" *Nếu phương trình* $f(x) = 0$ *có nghiệm* $x = a$ *thì đa thức* $f(x)$ *chia hết cho* $x - a$ "

Tức là, khi đó $f(x) = (x - a).g(x)$ và phương trình trở thành $(x - a)g(x) = 0$.

Ví dụ 11: *Giải phương trình*: $2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$ *biết rằng phương trình có một nghiệm là* $x = 1$.

✍ *Giải*

Thực hiện phép chia đa thức $2x^3 + x^2 - 5x + 2$ cho $x - 1$, ta được:

$$2x^3 + x^2 - 5x + 2 = (x-1)(2x^2 + 3x - 2) = (x-1)(2x^2 + 4x - x - 2)$$
$$= (x-1)[2x(x+2) - (x+2)] = (x-1)(2x-1)(x+2).$$

Khi đó, phương trình có dạng:

$$(x-1)(2x-1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ 2x-1=0 \\ x+2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{1}{2} \\ x=-2 \end{array}\right. .$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm phân biệt $x = 1$, $x = -2$, $x = \dfrac{1}{2}$.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy với việc cho thêm giả thiết "*Phương trình có một nghiệm là* $x = 1$ " đã giảm bớt được đáng kể độ khó của bài toán trong bước phân tích đa thức thành nhân tử. Điều này được hiểu là:

1. Với các em học sinh trung bình, bài toán được cho dưới dạng:
   " *Giải phương trình* $2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$ *biết rằng phương trình có một nghiệm là* $x = 1$ ".
2. Với các em học sinh khá, bài toán được cho dưới dạng:
   " *Giải phương trình* $2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$ ".

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Giải các phương trình:

a. $(2x - 6)(3 + 4x) = 0$.   b. $(4x - 5)(5x + 6)(6x - 7) = 0$.

c. $(x - 3)(2x + 1)(2x - 3)(4x + 3) = 0$.

d. $(3x - 2)(2x + 5)(8x - 3)(4x + 1)(3x - 1) = 0$.

Bài 2: Giải các phương trình:

a. $(x - 6)(x + 1) = 2(x + 1)$.   b. $(x - 2)(5x + 3) = (3x - 8)(x - 2)$.

c. $2x(15x + 25) - 33(3x + 5) = 0$.   d. $(2x^2 + 1)(2x + 5) = (2x^2 + 1)(x - 1)$.

Bài 3: Giải các phương trình:

a. $x^2 - 9x + 20 = 0$.   c. $x^2 + 2x - 15 = 0$.

b. $x^3 - 4x^2 + 5x = 0$.   d. $(x^2 - 1)^2 = 4x + 1$.

Bài 4: Giải phương trình: $4x^3 - 9x^2 + 6x - 1 = 0$
biết rằng phương trình có một nghiệm là $x = 1$.

Bài 5: Giải phương trình: $x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = 0$
biết rằng phương trình có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = -2$.

Bài 6: Cho phương trình: $(2x + 3m)(3x - 2m - 1) = 0$.

a. Tìm các giá trị của m sao cho một trong các nghiệm của phương trình là $x = 1$.

b. Với mỗi m vừa tìm được ở câu a), hãy giải phương trình đã cho.

Bài 7: Cho biểu thức hai biến: $f(x, y) = (x - 3y + 4)(2x + 3y - 1)$.

a. Tìm các giá trị của y sao cho phương trình (ẩn x) $f(x, y) = 0$ nhận $x = 2$ làm nghiệm.

b. Tìm các giá trị của x sao cho phương trình (ẩn y) $f(x, y) = 0$ nhận $y = 1$ làm nghiệm.

Bài 8: Cho phương trình: $x^3 + ax^2 + 11x - 6 = 0$.

a. Biết rằng $x = 1$ là một nghiệm của phương trình, hãy xác định a.

b. Với a vừa tìm được ở câu a) hãy tìm các nghiệm còn lại của phương trình.

Bài 9: * Giải các phương trình:

a. $3x^3 - 8x^2 - 2x + 4 = 0$.   d. $2x^3 - 9x + 2 = 0$.

b. $x^3 - 4x^2 + 7x - 6 = 0$.   e. $8x^3 - 4x^2 + 10x - 5 = 0$.

c. $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0$.   f. $x^3 + x^2 - x\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 0$.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1:

a. $x = 3, x = -\frac{3}{4}$.   b. $x = \frac{5}{4}, x = -\frac{6}{5}, x = \frac{7}{6}$.

c. $x = 3, x = -\frac{1}{2}, x = \frac{3}{2}, x = -\frac{3}{4}$.   d. $x = \frac{2}{3}, x = -\frac{5}{2}, x = \frac{3}{8}, x = -\frac{1}{4}, x = \frac{1}{3}$.

Bài 2:

a. $x = 8, x = -1$.   b. $x = 2, x = -\frac{11}{2}$.   c. $x = -\frac{5}{3}, x = \frac{33}{10}$.   d. $x = -6$.

Bài 3:

a. Biến đổi: $x^2 - 9x + 20 = x^2 - 4x - 5x + 20 = x(x-4) - 5(x-4) = (x-4)(x-5)$

Khi đó, phương trình có dạng: $(x-4)(x-5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-4=0 \\ x-5=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=5 \end{array}\right.$.

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt x = 4, x = 5.

b. Biến đổi: $x^3 - 4x^2 + 5x = x(x^2 - 4x + 5) = x[(x-2)^2 + 1]$.

Khi đó, phương trình có dạng: $x[(x-2)^2 + 1] = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy, phương trình có nghiệm x = 0.

c. Biến đổi: $x^2 + 2x - 15 = x^2 + 5x - 3x - 15 = x(x+5) - 3(x+5) = (x+5)(x-3)$

Khi đó, phương trình có dạng: $(x+5)(x-3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+5=0 \\ x-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-5 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt x = – 5, x = 3.

d. Biến đổi phương trình về dạng:

$$(x^2-1)^2 = 4x + 1 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 = 4x + 1 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 - 4x = 0$$
$$\Leftrightarrow x(x^3 - 2x - 4) = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 4x + 2x - 4) = 0$$
$$\Leftrightarrow x[x(x^2-4) + 2(x-2)] = 0 \Leftrightarrow x[x(x-2)(x+2) + 2(x-2)] = 0$$
$$\Leftrightarrow x(x-2)(x^2 + 2x + 2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt x = 0, x = 2.

Bài 4: Thực hiện phép chia đa thức $4x^3 - 9x^2 + 6x - 1$ cho $x - 1$, ta được:

$$4x^3 - 9x^2 + 6x - 1 = (x-1)(4x^2 - 5x + 1) = (x-1)(4x^2 - 4x - x + 1)$$
$$= (x-1)[4x(x-1) - (x-1)] = (x-1)(x-1)(4x-1).$$

Khi đó, phương trình có dạng: $(x-1)(x-1)(4x-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ 4x-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{1}{4} \end{array}\right.$.

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt x = 1, $x = \frac{1}{4}$.

Bài 5: Thực hiện phép chia đa thức $x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12$ cho $x - 1$, rồi tiếp tục chia thương cho $x + 2$, ta được:

$$x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = (x-1)(x+2)(x^2 - 5x + 6)$$
$$= (x-1)(x+2)(x^2 - 3x - 2x + 6) = (x-1)(x+2)[x(x-3) - 2(x-3)]$$
$$= (x-1)(x+2)(x-2)(x-3)$$

Khi đó, phương trình có dạng:

$$(x-1)(x+2)(x-2)(x-3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x+2=0 \\ x-2=0 \\ x-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \\ x=2 \\ x=3 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có bốn nghiệm phân biệt x = 1, x = ± 2, x = 3.

Bài 6: *Học sinh tự làm.*

Bài 7: *Học sinh tự làm.*

Bài 8:

a. Vì x = 1 là một nghiệm của phương trình nên ta được:

$$1^3 + a.1^2 + 11.1 - 6 = 0 \Leftrightarrow a = -6.$$

Vậy, với a = − 1 phương trình có một nghiệm là x = 1.

b. Với a = − 1, phương trình có dạng: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.

Vì x = 1 là nghiệm của phương trình nên đa thức $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ sẽ chia hết cho x − 1 (thực hiện phép chia đa thức $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ cho x − 1 ra nháp), từ đó ta được: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x^2 - 5x + 6)$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$(x - 1)(x^2 - 5x + 6) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ x - 2 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm phân biệt x = 1, x = 2, x = 3.

Bài 9:

a. Phân tích: $3x^3 - 8x^2 - 2x + 4 = (3x - 2)(x^2 - 2x - 2)$

Khi đó, phương trình có dạng: $(3x - 2)(x^2 - 2x - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 3x - 2 = 0 & (1) \\ x^2 - 2x - 2 = 0 & (2) \end{array}\right.$

- Giải (1), ta được $x = \frac{2}{3}$.
- Giải (2), ta biến đổi: $x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 3 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 3$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = \sqrt{3} \\ x - 1 = -\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 + \sqrt{3} \\ x = 1 - \sqrt{3} \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm phân biệt x = 1, $x = 1 \pm \sqrt{3}$.

b. Phân tích: $x^3 - 4x^2 + 7x - 6 = (x - 2)(x^2 - 2x + 3)$.

Tới đây đề nghị các em học sinh giải tiếp.

...

Vậy, phương trình có nghiệm x = 2.

c. $x = -1, x = -2, x = -\frac{1}{2}$.

d. $x = 2, x = -1 \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$.

e. $x = -\frac{1}{2}$

CHỦ ĐỀ 5

PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. TÌM ĐIỀU KIỆN XÁC ĐỊNH CỦA PHƯƠNG TRÌNH

Đối với các phương trình dạng: $\frac{A_1(x)}{B_1(x)} + \frac{A_2(x)}{B_2(x)} + ... + \frac{A_n(x)}{B_n(x)} = 0$

điều kiện xác định của phương trình được cho bởi hệ: $\begin{cases} B_1(x) \neq 0 \\ ... \\ B_n(x) \neq 0 \end{cases}$.

2. PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU

Để giải phương trình chứa ẩn ở mẫu, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tìm điều kiện xác định của phương trình.

Bước 2: Quy đồng mẫu hai vế của phương trình rồi khử mẫu.

Bước 3: Giải phương trình vừa nhận được.

Bước 4: Trong các giá trị của ẩn tìm được ở bước 3, các giá trị thoả mãn điều kiện xác định chính là nghiệm của phương trình đã cho.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: TÌM ĐIỀU KIỆN XÁC ĐỊNH CỦA PHƯƠNG TRÌNH

Ví dụ 1: *Tìm điều kiện xác định cho mỗi phương trình sau:*

a. $\frac{x-1}{x-2} = 3$.

b. $\frac{x}{x+1} = \frac{x-6}{x-4}$.

✍ *Giải*

a. Điều kiện xác định của phương trình là: $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$.

b. Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} x+1 \neq 0 \\ x-4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 4 \end{cases}$.

☞ ***Chú ý***: Trong những trường hợp hệ điều kiện phức tạp, chúng ta nên giải từng điều kiện một để giảm độ phức tạp, thí dụ sau sẽ minh hoạ trường hợp này.

Ví dụ 2: *Tìm điều kiện xác định cho phương trình sau:*

$$\frac{2x^2}{x^2-1} + \frac{2x-1}{x^2-5x+4} = 2.$$

✍ *Giải*

Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} x^2 - 1 \neq 0 & (1) \\ x^2 - 5x + 4 \neq 0 & (2) \end{cases}$.

- Giải (1), ta được: $x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$.
- Giải (2): $x^2 - 5x + 4 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 4x + 4 \neq 0 \Leftrightarrow x(x - 1) - 4(x - 1) \neq 0$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 4) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \neq 0 \\ x - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 4 \end{cases}.$$

Vậy, điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} x \neq \pm 1 \\ x \neq 1 \\ x \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 1 \\ x \neq 4 \end{cases}$.

Vấn đề 2: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU

Ví dụ 1: (Bài 27/tr 22 – Sgk): *Giải các phương trình sau:*

a. $\dfrac{2x - 5}{x + 5} = 3$. b. $\dfrac{x^2 - 6}{x} = x + \dfrac{3}{2}$.

c. $\dfrac{(x^2 + 2x) - (3x + 6)}{x - 3} = 0$. d. $\dfrac{5}{3x + 2} = 2x - 1$.

✍ *Giải*

a. Điều kiện: $x + 5 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -5$.

Ta có: $\dfrac{2x - 5}{x + 5} = 3 \Leftrightarrow 2x - 5 = 3(x + 5) \Leftrightarrow x = 20$ (thoả mãn)

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 20$.

b. Điều kiện: $x \neq 0$

Ta có: $\dfrac{x^2 - 6}{x} = x + \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow 2(x^2 - 6) = 2.x.x + 3.x$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 12 = 2x^2 + 3x \Leftrightarrow x = -4$ (thoả mãn).

Vậy, phương trình có nghiệm $x = -4$.

c. Điều kiện: $x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$

Ta có: $\dfrac{(x^2 + 2x) - (3x + 6)}{x - 3} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3x - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x(x - 3) + 2(x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 3)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 3 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 3 & \text{(loại)} \\ x = -2 \end{array}\right.$.

Vậy, phương trình có nghiệm $x = -2$.

d. Điều kiện: $3x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{2}{3}$

Ta có: $\frac{5}{3x+2} = 2x - 1 \Leftrightarrow 5 = (2x - 1)(3x + 2) \Leftrightarrow 6x^2 - 6x + 7x - 7 = 0$

$$\Leftrightarrow 6x(x - 1) + 7(x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(6x + 7) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\frac{7}{6} \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có 2 nghiệm $x = 1,\ x = -\frac{7}{6}$.

Ví dụ 2: (Bài 28/tr 22 – Sgk): *Giải các phương trình sau:*

a. $\frac{2x-1}{x-1} + 1 = \frac{1}{x-1}$.　　　b. $\frac{5x}{2x+2} + 1 = -\frac{6}{x+1}$.

c. $x + \frac{1}{x} = x^2 + \frac{1}{x^2}$.　　　d. $\frac{x+3}{x+1} + \frac{x-2}{x} = 2$.

✍ *Giải*

a. Điều kiện: $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

Ta có: $\frac{2x-1}{x-1} + 1 = \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow 2x - 1 + x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ (không thoả mãn)

Vậy, phương trình vô nghiệm.

b. Điều kiện: $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$

Ta có: $\frac{5x}{2x+2} + 1 = -\frac{6}{x+1} \Leftrightarrow 5x + 2x + 2 = (-6).2$

$\Leftrightarrow 7x = -14 \Leftrightarrow x = -2$ (thoả mãn)

Vậy, phương trình có 1 nghiệm.

c. Điều kiện: $x \neq 0$.

Ta có: $x + \frac{1}{x} = x^2 + \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x.x^2 + x = x^2.x^2 + 1 \Leftrightarrow x^3 + x = x^4 + 1$

$\Leftrightarrow x^4 - x^3 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^3(x - 1) + (x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x^3 - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$　　　(1)

Nhận thấy: $x^2 + x + 1 = x^2 + 1.\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} > 0$

Do đó: (1) $\Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (thoả mãn)

Vậy, phương trình có 1 nghiệm.

d. Điều kiện: $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ và $x \neq 0$

Ta có: $\frac{x+3}{x+1} + \frac{x-2}{x} = 2$

$\Leftrightarrow x(x + 3) + (x - 2)(x + 1) = 2x(x + 1)$

$\Leftrightarrow x^2 + 3x + x^2 - x - 2 = 2x^2 + 2x$

$\Leftrightarrow 0.x = 2$ (mâu thuẫn)

Vậy, phương trình vô nghiệm.

☞ ***Chú ý***: Việc giải phương trình chứa ẩn ở mẫu, đôi khi cần tới những phép biến đổi linh hoạt để giúp giảm bớt độ phức tạp khi thực hiện phép quy đồng mẫu số. Ví dụ sau sẽ minh hoạ điều này..

Ví dụ 3: *Giải phương trình*: $\frac{x-8}{x-7} = \frac{1}{7-x} + 8$.

✍ *Giải*

Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} x - 7 \neq 0 \\ 7 - x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 7 \\ x \neq 7 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 7$.

Tới đây để thực hiện tiếp chúng ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1: Quy đồng mẫu hai vế của phương trình rồi khử mẫu:

$$\frac{x-8}{x-7} = -\frac{1}{x-7} + 8 \Leftrightarrow \frac{x-8}{x-7} = -\frac{1}{x-7} + \frac{8(x-7)}{x-7}$$

$\Leftrightarrow x - 8 = -1 + 8(x - 7) \Leftrightarrow x - 8 = -1 + 8x - 56$

$\Leftrightarrow x - 8x = -1 - 56 + 8 \Leftrightarrow -7x = -49$

$\Leftrightarrow x = 7$, không thoả mãn.

Vậy, phương trình vô nghiệm.

Cách 2: Thực hiện phép quy đồng cục bộ:

$$\frac{x-8}{x-7} = \frac{1}{7-x} + 8 \Leftrightarrow \frac{x-8}{x-7} + \frac{1}{x-7} = 8 \Leftrightarrow \frac{x-8+1}{x-7} = 8$$

$\Leftrightarrow 1 = 8$, mâu thuẫn.

Vậy, phương trình vô nghiệm.

☞ ***Nhận xét***: Cách 2 trong lời giải trên được trình bày để minh hoạ bước đầu cho hiệu quả của phép quy đồng cục bộ.

Ví dụ 4: *Giải phương trình*: $x^2 + \frac{2x-1}{x-2} = 3x + \frac{3}{x-2}$.

✍ *Giải*

Điều kiện xác định của phương trình là: $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$x^2 - 3x + \frac{2x-1}{x-2} - \frac{3}{x-2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + \frac{2x-1-3}{x-2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + \frac{2x-4}{x-2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-1) - 2(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \text{ loại vì không thoả mãn điều kiện} \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có một nghiệm $x = 1$.

☞ ***Nhận xét***:

1. Trong lời giải trên, chúng ta sử dụng phép quy đồng cục bộ để từ đó nhận được phương trình $x^2-3x+2 = 0$, và việc đưa phương trình này về dạng tích tương đối đơn giản.
2. Trong trường hợp chúng ta không sử dụng phương pháp quy đồng cục bộ thì sẽ nhận được:

$$x^2(x-2) + 2x - 1 = 3x(x-2) + 3 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 3x^2 - 6x + 3$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$$

Dễ thấy, việc chuyển đổi phương trình này về dạng tích khó khăn hơn nhiều so với phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Ví dụ 3: *Giải phương trình*: $\dfrac{x^2-1}{x^6-5x+4} = 0$.

✍ *Giải*

Điều kiện xác định của phương trình là: $x^6 - 5x + 4 \neq 0$. (*)

Phương trình tương đương với: $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Kiểm tra điều kiện:

- Với $x = 1$, ta có: $1^6 - 5.1 + 4 = 1 - 5 + 4 = 0$, không thoả mãn điều kiện (*).
- Với $x = -1$, ta có: $1^6 - 5.(-1) + 4 = 1 + 5 + 4 = 10 \neq 0$, thoả mãn (*)

Vậy, phương trình có một nghiệm $x = -1$.

☞ *Nhận xét*: Như vậy, trong những trường hợp việc tìm ra được điều kiện một cách cụ thể là rất khó khăn, chúng ta sẽ lựa chọn theo hướng:

Bước 1: Tìm điều kiện xác định của phương trình (và không giải).

Bước 2: Giải phương trình.

Bước 3: Thử lại.

Bước 4: Kết luận về nghiệm cho phương trình.

Ví dụ 5: (Bài 31/tr 23 – Sgk): *Giải các phương trình sau:*

a. $\frac{1}{x-1} - \frac{3x^2}{x^3-1} = \frac{2x}{x^2+x+1}$.

b. $\frac{3}{(x-1)(x-2)} + \frac{2}{(x-3)(x-1)} = \frac{1}{(x-2)(x-3)}$.

c. $1 + \frac{1}{x+2} = \frac{12}{8+x^3}$.

d. $\frac{13}{(x-3)(2x+7)} + \frac{1}{2x+7} = \frac{6}{(x-3)(x+3)}$.

✍ *Giải*

a. Điều kiện: $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$.

Ta có: $\frac{1}{x-1} - \frac{3x^2}{x^3-1} = \frac{2x}{x^2+x+1} \Leftrightarrow x^2 + x + 1 - 3x^2 = 2x(x-1)$

$\Leftrightarrow -4x^2 - x + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow -x(4x+1) + (4x+1) = 0$

$\Leftrightarrow (4x+1)(x-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{1}{4} \\ x = 1 \quad (\text{loại}) \end{array}\right.$.

Vậy, phương trình có 1 nghiệm.

b. Điều kiện: $x \neq 1$ và $x \neq 2$ và $x \neq 3$.

Ta có: $\frac{3}{(x-1)(x-2)} + \frac{2}{(x-3)(x-1)} = \frac{1}{(x-2)(x-3)}$

$\Leftrightarrow 3(x-3) + 2(x-2) = (x-1) \Leftrightarrow x = 3$ (loại).

Vậy, phương trình vô nghiệm.

c. Điều kiện: $x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$.

Ta có: $1 + \frac{1}{x+2} = \frac{12}{8+x^3} \Leftrightarrow 8 + x^3 + (x^2 - 2x + 4) = 12$

$\Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \quad (\text{loại}) \end{array}\right.$.

Vậy, phương trình có 2 nghiệm.

d. **Điều kiện:** $x^2 - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 3$ và $2x + 7 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{7}{2}$.

Ta có: $\frac{13}{(x-3)(2x+7)} + \frac{1}{2x+7} = \frac{6}{(x-3)(x+3)}$

$\Leftrightarrow 13(x + 3) + x^2 - 3 = 6(2x + 7)$

$\Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 3x - 12 = 0$

$\Leftrightarrow x(x + 4) - 3(x + 4) = 0 \Leftrightarrow (x + 4)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = 3 \text{ (loại)} \end{array}\right.$.

Vậy, phương trình có 1 nghiệm.

Ví dụ 6: (Bài 32/tr 23 – Sgk): *Giải các phương trình sau:*

a. $\frac{1}{x} + 2 = \left(\frac{1}{x} + 2\right)(x^2 + 1)$. b. $\left(x + 1 + \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x - 1 - \frac{1}{x}\right)^2$.

Giải

a. **Điều kiện:** $x \neq 0$.

Ta có: $\frac{1}{x} + 2 = \left(\frac{1}{x} + 2\right)(x^2 + 1) \Leftrightarrow \frac{1}{x} + 2 = x^2\left(\frac{1}{x} + 2\right) + \left(\frac{1}{x} + 2\right)$

$\Leftrightarrow x^2\left(\frac{1}{x} + 2\right) = 0 \Leftrightarrow x + 2x^3 = 0 \Leftrightarrow x(1 + 2x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \quad \text{(loại)} \\ x = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$.

Vậy, phương trình có 1 nghiệm.

b. **Điều kiện:** $x \neq 0$.

Ta có: $\left(x + 1 + \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x - 1 - \frac{1}{x}\right)^2 \Leftrightarrow \left(x + 1 + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x - 1 - \frac{1}{x}\right)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x + 1 + \frac{1}{x} - x + 1 + \frac{1}{x}\right)\left(x + 1 + \frac{1}{x} + x - 1 - \frac{1}{x}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(2 + \frac{2}{x}\right).2x = 0 \Leftrightarrow 2x(2x + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \quad \text{(loại)} \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Vậy, phương trình có 1 nghiệm.

Ví dụ 7: (Bài 33/tr 23 – Sgk): *Tìm các giá trị của a sao cho mỗi biểu thức sau có giá trị bằng 2.*

a. $\frac{3a - 1}{3a + 1} + \frac{a - 3}{a + 3}$. b. $\frac{10}{3} - \frac{3a - 1}{4a + 12} - \frac{7a + 2}{6a + 18}$.

✍ *Giải*

a. Theo yêu cầu đề bài, ta có: $\dfrac{3a-1}{3a+1}+\dfrac{a-3}{a+3}=2.$ (1)

Điều kiện $3a+1\neq 0 \Leftrightarrow a\neq -\dfrac{1}{3}$ và $a+3\neq 0 \Leftrightarrow a\neq -3$.

Ta có: (1) $\Leftrightarrow (3a-1)(a+3)+(a-3)(3a+1)=2(3a+1)(a+3)$

$\Leftrightarrow 6a^2-6=6a^2+20a+6 \Leftrightarrow 20a=-12 \Leftrightarrow a=-\dfrac{3}{5}$.

Vậy, với $a=-\dfrac{3}{5}$ biểu thức thoả mãn đề bài.

b. Theo yêu cầu đề bài, ta có: $\dfrac{10}{3}-\dfrac{3a-1}{4a+12}-\dfrac{7a+2}{6a+18}=2.$ (2)

Điều kiện $a+3\neq 0 \Leftrightarrow a\neq -3$.

Ta có: (2) $\Leftrightarrow 40(a+3)-3(3a-1)-2(7a+2)=24(a+3)$

$\Leftrightarrow 40a+120-9a+3-14a-4=24a+72 \Leftrightarrow 7a=47 \Leftrightarrow a=\dfrac{47}{7}$.

Vậy, với $a=\dfrac{47}{7}$ biểu thức thoả mãn đề bài.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Giải các phương trình:

a. $x+\dfrac{2x-1}{1-x}=-1.$

b. $x+\dfrac{1}{x}=2.$

Bài 2: Giải các phương trình:

a. $\dfrac{x}{x-2}=\dfrac{x-2}{x-3}.$

b. $\dfrac{2x-4}{x-1}-\dfrac{x-3}{x-2}=1.$

c. $\dfrac{x+3}{x-1}-\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{x^2-2}{1-x^2}=0.$

d. $\dfrac{2x+1}{x-3}-\dfrac{3}{x-2}=2.$

Bài 3: Giải các phương trình:

a. $\dfrac{2x}{x-1}-\dfrac{x}{x-2}=\dfrac{x^2}{(x-1)(x-2)}.$

b. $\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{6}{x-1}+\dfrac{8}{(x+2)(x-1)}=0.$

c. $\dfrac{x+2}{x+3}-\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{4}{(x+3)(x-1)}.$

d. $\dfrac{x-1}{x+2}-\dfrac{x+1}{x-2}=\dfrac{x-3}{4-x^2}.$

Bài 4: Giải các phương trình:

a. $\dfrac{1}{x^2+2x+1}-\dfrac{3}{x^2-2x+1}=\dfrac{2}{1-x^2}.$

b. $\dfrac{x+1}{x^2+x+1}-\dfrac{x-1}{x^2-x+1}=\dfrac{3}{x(x^4+x^2+1)}.$

Bài 5: Giải các phương trình:

a. $\frac{x+1}{x-3} - \frac{1}{x-1} = \frac{2}{(x-1)(x-3)}$.

b. $\frac{2x-1}{x-1} + \frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{6x-2}{x-2}$.

c. $x + \frac{x}{x+2} + \frac{x+3}{x^2+5x+6} + \frac{x+4}{x^2+6x+8} = 1$.

Bài 6: Cho phương trình: $\frac{x-m}{x-1} + \frac{x-2}{x+1} = 2$.

a. Giải phương trình với m = 2.
b. Giải phương trình với m = 1.
c. Giải phương trình với m = – 2.
d. Tìm m để phương trình nhận x = 2 làm nghiệm.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1:

a. x = 0, x = 2. b. x = 1.

Bài 2:

a. x = 4. b. x = 3. c. x = – 8. d. $x = \frac{5}{4}$.

Bài 3:

a. x = 0. b. x = – 1. c. x = – 3. d. $x = -\frac{3}{5}$.

Bài 4:

a. $x = -\frac{1}{2}$. b. $x = \frac{3}{2}$.

Bài 5:

b. x = 0. c. x = 0. d. x = 0.

Bài 6: điều kiện có nghĩa cho phương trình là $x \neq \pm 1$.

Biến đổi phương trình về dạng:

$(x - m)(x + 1) + (x - 2)(x - 1) = 2(x - 1)(x + 1) \Leftrightarrow (m + 2)x = 4 - m$. (1)

a. Với m = 2, phương trình (1) có dạng: $4x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Vậy, với m = 2 phương trình nhận $x = \frac{1}{2}$ làm nghiệm.

b. Với m = 1, phương trình (1) có dạng: $3x = 3 \Leftrightarrow x = 1$.
Vậy, với m = 1 phương trình nhận x = 1 làm nghiệm.

c. Với m = – 2, phương trình (1) có dạng: 0x = 6, mâu thuẫn.
Vậy, với m = – 2 phương trình vô nghiệm.

d. Để phương trình nhận x = 2 làm nghiệm điều kiện là:

$2(m + 2) = 4 - m \Leftrightarrow 3m = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

Vậy, với m = 0 thoả mãn điều kiện đầu bài.

CHỦ ĐỀ 6 GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Để giải bài toán bằng cách lập phương trình, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Lập phương trình:

1. Chọn ẩn số và đặt điều kiện thích hợp cho ẩn số.
2. Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết.
3. Lập phương trình biểu thị mối liên hệ giữa các đại lượng.

Bước 2: Giải phương trình.

Bước 3: Kiểm tra xem trong các nghiệm của phương trình, nghiệm nào thoả mãn điều kiện của ẩn, nghiệm nào không, rồi kết luận.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: *Một phân số có tử số bé hơn mẫu số là 11. Nếu tăng tử số lên 3 đơn vị và giảm mẫu số đi 4 đơn vị thì được một phân số bằng* $\frac{3}{4}$. *Tìm phân số ban đầu.*

✍ *Giải*

Gọi x là tử số của phân số phải tìm, điều kiện x là số nguyên.

Theo giả thiết:

- Phân số có tử số bé hơn mẫu số là 11 nên mẫu số bằng x + 11, suy ra phân số có dạng: $\frac{x}{x+11}$.
- Khi tăng tử số lên 3 đơn vị và giảm mẫu số đi 4 đơn vị thì được một phân số bằng $\frac{3}{4}$ nên:

$$\frac{x+3}{(x+11)-4}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\frac{x+3}{x+7}=\frac{3}{4}\overset{x\neq-7}{\Leftrightarrow}4(x+3)=3(x+7)$$

$$\Leftrightarrow 4x-3x=21-12\Leftrightarrow x=9\text{, thoả mãn điều kiện.}$$

Vậy, phân số cần tìm bằng $\frac{9}{20}$.

☞ ***Nhận xét***:

1. Bài toán trên yêu cầu tìm ra phân số, xong thực chất là đi tìm tử số (hoặc mẫu số) của phân số đó, do đó chúng ta thiết lập ẩn số x cho tử số.
2. Nếu bài toán yêu cầu tìm hai hay nhiều giá trị thì chúng ta cần lựa chọn ẩn để gán cho *giá trị thuận lợi nhất* (tuy nhiên trong nhiều trường hợp chúng có vai trò như nhau).

Ví dụ 2: (Bài 34/tr 25 – Sgk): *Mẫu số của một phân số lớn hơn tử số của nó là 3 đơn vị. Nếu tăng cả tử và mẫu của nó thêm 2 đơn vị thì được phân số mới bằng $\frac{1}{2}$. Tìm phân số ban đầu.*

✍ *Giải*

Đặt x là tử số của phân số phải tìm ($x \in Z$ và $x \neq -3$)

Khi đó, phân số phải tìm là: $\frac{x}{x+3}$

Theo đề bài ta có phương trình:

$$\frac{x+2}{x+3+2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(x+2) = x+5 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (thoả mãn)}$$

Vậy, phân số phải tìm là $\frac{1}{4}$.

Ví dụ 3: (*Bài toán cổ*): *Hỏi có bao nhiêu gà, bao nhiêu chó, biết:*

Vừa gà vừa chó
Bó lại cho tròn
Ba mươi sáu con
Một trăm chân chẵn.

✍ *Giải*

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta lần lượt thực hiện:

Gọi x là số gà, điều kiện x là số nguyên dương nhỏ hơn 36.

Theo giả thiết:

- Tổng số gà và chó là " *Ba mươi sáu con* " nên số chó bằng 36 – x.
- Tổng số chân của gà và của chó là " *Một trăm chân chẵn* " nên:

$$2x + 4(36 - x) = 100 \Leftrightarrow 2x + 144 - 4x = 100$$
$$\Leftrightarrow -2x = 100 - 144 \Leftrightarrow x = 22, \text{ thoả mãn điều kiện.}$$

Vậy, số gà bằng 22 con và số chó bằng 36 – 22 = 14 con.

Cách 2: Ta lần lượt thực hiện:

Gọi x là số chó, điều kiện x là số nguyên dương nhỏ hơn 36.

Theo giả thiết:

- Tổng số gà và chó là "*Ba mươi sáu con*" nên số gà bằng 36 – x..
- Tổng số chân của gà và của chó là " *Một trăm chân chẵn* " nên:

$$4x + 2(36 - x) = 100 \Leftrightarrow 4x + 72 - 2x = 100$$
$$\Leftrightarrow 2x = 100 - 72 \Leftrightarrow x = 14, \text{ thoả mãn điều kiện.}$$

Vậy, số chó bằng 14 con và số gà bằng 36 – 14 = 22 con.

☛ ***Nhận xét***: Trong hai cách giải của bài toán trên, chúng ta đã tuân thủ đủ 3 bước cần thực hiện khi giải bài toán bằng cách lập phương trình, cụ thể:

1. Bài toán yêu cầu tìm số gà và số chó, do vậy có thể lựa chọn số gà hoặc số chó là ẩn:
   - Trong cách 1 ta chọn x là số gà và thiết lập điều kiện $x \in N^*$ và $x < 36$.
   - Tiếp đó, ta diễn đạt đại lượng chưa biết là số chó bằng $36 - x$.
   - Cuối cùng, ta thiết lập được phương trình biểu thị mối liên hệ giữa các đại lượng (là x và $36 - x$) thông qua giả thiết tổng số chân bằng 100.
2. Giải phương trình nhận được trong bước 1, ta được $x = 22$.
3. Vì giá trị $x = 22$ thoả mãn điều kiện được thiết lập trong bước 1, từ đó ta suy ra số chó và kết luận nghiệm cho bài toán.

Ví dụ 4: *Hiệu hai số bằng 8, số này gấp đôi số kia. Tìm hai số đó.*

✍ *Giải*

Gọi x là số thứ nhất trong hai số đã cho.

Theo giả thiết:

- Số thứ hai gấp đôi lần số thứ nhất nên nó bằng 2x.
- Hiệu hai số bằng 8 nên: $x - 2x = 8$ (1)

  hoặc $2x - x = 8$. (2)

Giải (1), ta được $x = -8$, khi đó số còn lại bằng -16.

Giải (2), ta được $x = 8$, khi đó số còn lại bằng 16.

Vậy, có hai cặp số thoả mãn điều kiện đầu bài là -8 và -16 hoặc 8 và 16.

☞ ***Nhận xét***: Ví dụ trên cho thấy, có thể có 1 hoặc nhiều phương trình biểu thị mối liên hệ giữa các đại lượng – *Điều này nhắc nhở các em học sinh cần có được cái nhìn tổng quan để chỉ ra được đầy đủ các trường hợp.*

Ví dụ 5: (Bài 37/tr 30 – Sgk): *Lúc* 6 giờ, *một xe máy khởi hành từ* A *đến* B. *Sau đó* 1 giờ, *một ôtô cũng xuất phát từ* A *đến* B *với vận tốc trung bình lớn hơn vận tốc trung bình của xe máy* 20km/h. *Cả hai xe đến* B *đồng thời vào lúc* 9 giờ 30 phút *cùng ngày. Tính độ dài quãng đường* AB *và vận tốc trung bình của xe máy.*

✍ *Giải*

Gọi x là độ dài quãng đường AB ($x > 0$, đơn vị: km)

Do đó, vận tốc của xe máy là $\frac{x}{3,5}$ (km/h).

Vận tốc xe ôtô lớn hơn vận tốc xe máy là 20km/h.

Vậy, ta có phương trình: $\frac{x}{2,5} - \frac{x}{3,5} = 20 \Leftrightarrow x = 175$ (thoả mãn)

Vậy, quãng đường AB dài 175km.

Ví dụ 6: (Bài 46/tr 31 – Sgk): *Một người lái ôtô dự định đi từ A đến B với vận tốc 48km/h. Nhưng sau khi đi được một giờ với vận tốc ấy, ôtô bị tàu hoả chắn đường trong 10 phút. Do đó, để kịp đến B đúng thời gian dự định, người đó phải tăng vận tốc thêm 6km/h. Tính quãng đường AB.*

✍ *Giải*

Gọi x là độ dài quãng đường AB (x > 48; đơn vị: km).

Suy ra, thời gian dự định đi là $\frac{x}{48}$ (giờ).

Sau khi đi được 1 giờ với vận tốc 48km/h thì quãng đường AB còn lại là (x – 48) (km).

Vận tốc ôtô sau khi bị chắn đường là: 48 + 6 = 54 (km/h)

Thời gian đi hết quãng đường còn lại là: $\frac{x-48}{54}$ (giờ)

Theo đề bài, ta có phương trình: $\frac{x}{48} = 1 + \frac{x-48}{54} + \frac{1}{6} \Leftrightarrow x = 120$ (thoả mãn)

Vậy, quãng đường AB dài 120 km.

Ví dụ 7: (Bài 47/tr 32 – Sgk): *Hà An gửi vào quỹ tiết kiệm x nghìn đồng với lãi suất mỗi tháng là a% (a là một số cho trước) và lãi suất này được tính góp vào vốn cho tháng sau.*

a. *Hãy viết biểu thức biểu thị:*
   - *Số tiền lãi sau tháng thứ nhất.*
   - *Số tiền (cả gốc lẫn lãi) có được sau tháng thứ nhất.*
   - *Tổng số tiền lãi có được sau tháng thứ hai.*

b. *Nếu lãi suất là 1,2% (tức là a = 1,2) và sau 2 tháng tổng số tiền lãi là 48,288 nghìn đồng, thì lúc đầu bà An gửi bao nhiêu tiền tiết kiệm.*

✍ *Giải*

a. Số tiền lãi sau một tháng gửi với lãi suất a% của số tiền gửi x nghìn đồng là ax.

Số tiền có được (cả gốc lẫn lãi) sau tháng thứ nhất là:

$x + ax = x(1 + a)$ (nghìn đồng)

Số tiền lãi sau tháng thứ hai là: $ax + ax(1 + a) = x(a^2 + 2a)$ (nghìn đồng)

b. Thay a = 1,2 và số tiền lãi sau 2 tháng bằng 48,288 nghìn đồng, ta được

$$x\left(\frac{144}{1000000} + \frac{24}{1000}\right) = 48,288$$

$\Leftrightarrow x = 2000$ (nghìn đồng) hay x = 2 000 000 đồng.

Vậy, lúc đầu bà An gửi tiết kiệm là 2 triệu đồng.

Ví dụ 8: *Tổng hai số bằng 72, hiệu của chúng bằng 6. Tìm hai số đó.*

✍ *Giải*

Gọi x là số lớn trong hai số đã cho, điều kiện $6 \le x \le 72$.

Theo giả thiết:

- Tổng hai số bằng 72 nên số nhỏ bằng $72 - x$.
- Hiệu hai số bằng 6 nên: $x - (72 - x) = 6 \Leftrightarrow 2x - 72 = 6 \Leftrightarrow 2x = 6 + 72$

  $\Leftrightarrow 2x = 78 \Leftrightarrow x = 39$, thoả mãn điều kiện.

Vậy, số lớn bằng 39 và số nhỏ bằng $72 - 39 = 33$.

☞ ***Chú ý:*** Trong lời giải bài toán trên, nếu chúng ta không phân biệt số lớn và số nhỏ thì cần phải lập hai phương trình dạng:

$$x - (72 - x) = 6 \text{ hoặc } (72 - x) - x = 6.$$

Ví dụ 9: (Bài 40/tr 31 – Sgk): *Năm nay, tuổi mẹ gấp 3 lần tuổi Phương. Phương tính rằng 13 năm nữa thì tuổi mẹ chỉ còn gấp 2 lần tuổi Phương thôi. Hỏi năm nay Phương bao nhiêu tuổi?*

✍ *Giải*

Gọi x là tuổi của Phương hiện nay ($x > 0$, đơn vị: tuổi)

Do đó, tuổi của mẹ Phương là 3x (tuổi)

Mười ba năm sau thì:

- Tuổi của Phương là: $x + 13$ (tuổi).
- Tuổi của mẹ Phương là: $3x + 13$ (tuổi).

Theo đề bài ta có phương trình $3x + 13 = 2(x + 13) \Leftrightarrow x = 13$ (thoả mãn)

Vậy, năm nay Phương 13 tuổi.

Ví dụ 10: (Bài 35/tr 25 – Sgk): *Học kì một, số học sinh giỏi của lớp 8A bằng $\frac{1}{8}$ số học sinh cả lớp. Sang học kì hai, có thêm 3 bạn phấn đấu trở thành học sinh giỏi nữa, do đó số học sinh giỏi bằng 20% số học sinh cả lớp. Hỏi lớp 8A có bao nhiêu học sinh?*

✍ *Giải*

Gọi x là số học sinh của lớp 8A ($a > 0$, đơn vị: học sinh).

- Số học sinh giỏi của lớp 8A ở học kì I là $\frac{x}{8}$ (học sinh)
- Số học sinh giỏi của lớp 8A ở học kì II là $\frac{x}{8} + 3$ (học sinh)

Theo đề bài thì số học sinh giỏi học kì II bằng 20% số học sinh cả lớp, nghĩa là: $\frac{x.20}{100} = \frac{x}{5}$ (học sinh)

Ta có, phương trình: $\frac{x}{8} + 3 = \frac{x}{5} \Leftrightarrow 5x + 120 = 8x \Leftrightarrow x = 40$ (thoả mãn)

Vậy, lớp 8A có 40 học sinh.

Ví dụ 11: *(Bài toán cổ Hi Lạp):*

- *Thưa Py–ta–go lỗi lạc, trường của người có bao nhiêu môn đệ?*
  Nhà hiền triết trả lời:
- *Hiện nay, một nửa đang học Toán, một phần tư đang học nhạc, một phần bảy ngồi yên suy nghĩ. Ngoài ra còn có ba phụ nữ.*

Hỏi trường Đại học của Py – ta – go có bao nhiêu người ?

✍ *Giải*

Gọi x là số người trong trường Đại học của Py – ta – go, điều kiện $x \in \mathbb{N}^*$. Vì:

- Một nửa đang học Toán, tức là có $\frac{x}{2}$.
- Một phần tư đang học Nhạc, tức là có $\frac{x}{4}$.
- Một phần bảy ngồi yên suy nghĩ, tức là có $\frac{x}{7}$.
- Tổng số những người học Toán, Nhạc, ngồi yên suy nghĩ và ba phụ nữ bằng số môn đệ của trường nên:

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{7} + 3 = x \Leftrightarrow 14x + 7x + 4x + 3.28 = 28x$$

$\Leftrightarrow 25x + 84 = 28x \Leftrightarrow 3x = 84 \Leftrightarrow x = 28$, thoả mãn điều kiện.

Vậy, trường Đại học của Py – ta – go có 28 người.

Ví dụ 12: (Bài 36/tr 26 – Sgk): *Bài toán nói về cuộc đời của nhà toán học Đi–ô–phăng, lấy trong Hợp tuyển Hi Lạp, cuốn sách gồm 46 bài toán về số, viết dưới dạng thơ trào phúng.*

Thời thơ ấu của Đi–ô–phăng chiếm $\frac{1}{6}$ *cuộc đời*
$\frac{1}{12}$ *cuộc đời tiếp theo là thời thanh niên sôi nổi*
Thêm $\frac{1}{7}$ *cuộc đời nữa ông sống độc thân.*
Sau khi lập gia đình được 5 năm thì sinh một con trai
Nhưng số mệnh chỉ cho con sống bằng nửa đời cha
Ông đã từ trần 4 năm sau khi con ông mất

Đi–ô–phăng sống bao nhiêu tuổi, hãy tính cho ra ?

✍ *Giải*

Gọi x là tuổi của Đi–ô–phăng (x > 0, đơn vị: tuổi). Ta có:

- Thời thơ ấu là $\frac{x}{6}$ (tuổi).

- Thời thanh niên là $\frac{x}{12}$ (tuổi).
- Thời kì độc thân sau tuổi thanh niên là $\frac{x}{7}$ (tuổi).
- Tuổi của con Đi–ô–phăng cho đến khi chết là $\frac{x}{2}$ (tuổi).

Từ đó, ta có phương trình:

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x \Leftrightarrow 14x + 7x + 12x + 42x + 756 = 84x$$

$$\Leftrightarrow 75x + 756 = 84x \Leftrightarrow x = 84 \text{ (thoả mãn)}$$

Vậy, Đi–ô–phăng thọ 84 tuổi.

Ví dụ 13: (Bài 41/tr 31 – Sgk): *Một số tự nhiên có hai chữ số. Chữ số hàng đơn vị gấp hai lần chữ số hàng chục. Nếu thêm chữ số 1 vào giữa hai chữ số ấy thì được một số mới lớn hơn số ban đầu là 370. Tìm số ban đầu.*

✍ *Giải*

Gọi x là chữ số hàng chục ($0 < x < 9$, $x \in N$).

Khi đó, chữ số hàng đơn vị là 2x. Khi xen chữ số 1 vào giữa hai chữ số thì x là chữ số hàng trăm và 2x là chữ số hàng đơn vị.

Như vậy:

- Số ban đầu là $10x + 2x$
- Số mới là $100x + 10.1 + 2x$

Theo đề bài ta có phương trình:

$$100x + 10 + 2x - (10x + 2x) = 370 \Leftrightarrow 90x = 360 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (thoả mãn)}.$$

Vậy, số cần tìm là 48.

Ví dụ 14: (Bài 42/tr 31 – Sgk): *Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng nếu viết thêm một chữ số 2 vào bên trái và một chữ số 2 vào bên phải số đó thì ta được một số lớn gấp 153 lần số ban đầu.*

✍ *Giải*

Gọi $\overline{ab}$ là số có hai chữ số cần tìm.

Khi thêm một chữ số 2 vào bên trái và một chữ số 2 vào bên phải của $\overline{ab}$ thì ta có số mới là: $\overline{2ab2} = 2.1000 + a.100 + b.10 + 2$.

Theo đề bài ta có phương trình:

$$\overline{2ab2} = 153.\overline{ab} \Leftrightarrow 2000 + 10.\overline{ab} + 2 = 153.\overline{ab}$$

$$\Leftrightarrow 143\,\overline{ab} = 2002 \Leftrightarrow \overline{ab} = 14 \text{ (thoả mãn)}$$

Ví dụ 15: (Bài 43/tr 31 – Sgk): *Tìm phân số có đồng thời các tính chất sau:*

a. *Tử số của phân số là số tự nhiên có một chữ số.*

b. *Hiệu giữa tử số và mẫu số bằng 4.*

c. *Nếu giữ nguyên tử số và viết thêm vào bên phải của mẫu số một chữ số đúng bằng tử số thì ta được một phân số mới bằng phâm số* $\frac{1}{5}$.

✍ *Giải*

Gọi x là tử số của phân số ban đầu ($x < 10$, $x \in N$)

Suy ra, phân số ban đầu là: $\frac{x}{x-4}$.

Khi viết thêm chữ số bằng tử số lúc đầu vào bên phải thì giá trị của mẫu số sẽ là $10(x - 4) + x$.

Theo đề bài ta có phương trình:

$$\frac{x}{10(x-4)+4} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 5x = 11x - 40 \Leftrightarrow 6x = 40 \Leftrightarrow x = \frac{20}{3} \text{ (loại).}$$

Vậy, không có phân số nào thoả mãn điều kiện để bài.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho phân số $\frac{23}{201}$. Tìm một số sao cho nếu lấy tử cộng với số đó, lấy mẫu trừ đi số đó thì phân số mới có giá trị bằng $\frac{3}{5}$.

Bài 2: Tổng hai số bằng 90, hiệu của chúng bằng 72. Tìm hai số đó.

Bài 3: Tổng hai số bằng 33, số này gấp đôi số kia. Tìm hai số đó.

Bài 4: Hiệu hai số bằng 9, số này gấp đôi số kia. Tìm hai số đó.

Bài 5: Hiệu hai số bằng 4, tỉ số giữa chúng bằng $\frac{3}{2}$. Tìm hai số đó.

Bài 6: Một phân số có tử số bé hơn mẫu số là 11. Nếu tăng tử số lên 3 đơn vị và giảm mẫu số đi 5 đơn vị thì được một phân số bằng $\frac{2}{3}$. Tìm phân số ban đầu.

Bài 7: Có hai ngăn sách, trong đó số sách ở ngăn I gấp ba số sách ở ngăn II. Sau khi chuyển 20 cuốn sách từ ngăn I sang ngăn II thì số sách ở ngăn II bằng $\frac{5}{7}$ số sách ở ngăn I. Tính số sách ở mỗi ngăn lúc đầu.

Bài 8: Ba khối học sinh 6, 7, 8 đi tham quan. Số học sinh khối 6 bằng $\frac{2}{5}$ tổng số. Số học sinh khối 7 bằng $\frac{3}{4}$ số học sinh khối 6. Số học sinh khối 8 là 135 người. Tính tổng số học sinh đi tham quan.

Bài 9: Mẹ 37 tuổi, con 7 tuổi. Sau mấy năm nữa thì tuổi mẹ gấp ba tuổi con ?

Bài 10: Tìm một số tự nhiên biết rằng nếu viết thêm một chữ số 4 vào cuối của số đó thì số ấy tăng thêm 1219 đơn vị.

Bài 11: Hai lớp 8A và 8B có tổng cộng 94 học sinh. Biết rằng 25% số học sinh 8A đạt loại giỏi, 20% số học sinh 8B đạt loại giỏi và tổng số học sinh giỏi của hai lớp là 21 học sinh. Tính số học sinh của mỗi lớp.

Bài 12: Hai người cùng khởi hành một lúc từ A để đến B, đường dài 60km. Vận tốc người thứ nhất là 12km/h, vận tốc người thứ hai là 15km/h. Hỏi sau lúc khởi hành bao lâu thì người thứ nhất cách B một quãng đường gấp đôi khoảng cách từ người thứ hai đến B ?

Bài 13: Một người đi từ A để đến B, vận tốc 30km/h. Lúc từ B về A, người đó đi với vận tốc 40km/h, do đó thời gian về ít hơn thời gian đi là 45 phút. Tính quãng đường AB.

Bài 14: Đường sông từ thành phố A đến thành phố B ngắn hơn đường bộ 10km. Để đi từ A đến B, một ca nô đi hết 3 giờ 20 phút, một ô tô đi hết 2 giờ. Biết vận tốc của ca nô kém vận tốc của ô tô là 17km/h, tính vận tốc của canô.

Bài 15: Một ca nô tuần tra đi xuôi từ A đến B hết 1 giờ 20 phút và ngược dòng từ B về A hết 2giờ. Biết vận tốc dòng nước là 3 km/h. Tính vận tốc riêng của ca nô.

Bài 16: Hai người cùng đi một lúc từ A để đến B, đường dài 120km. Người thứ nhất đi với vận tốc không đổi trên cả quãng đường. Người thứ hai đi trên nửa đầu của quãng đường với vận tốc lớn hơn vận tốc của người thứ nhất là 10km/h, đi trên nửa sau của quãng đường với vận tốc kém vận tốc người thứ nhất là 6km/h. Biết rằng hai người đến B cùng một lúc, tính vận tốc của người thứ nhất.

Bài 17: Người ta pha 3 kg nước nóng ở nhiệt độ 90^0C với 2 kg nước lạnh ở nhiệt độ 20^0. Hỏi nhiệt độ nước sau khi pha là bao nhiêu ?

Bài 18: Cho 200 gam dung dịch có nồng độ muối là 10%. Phải pha thêm vào dung dịch đó bao nhiêu gam nước để dung dịch lúc sau có nồng độ muối là 8% ?

Bài 19: 200g dung dịch chứa 50g muối. Cần pha thêm bao nhiêu gam nước để được một dung dịch chứa 10% muối ?

Bài 20: Năm ngoái tổng số dân của hai tỉnh A và B là 4 triệu. Dân số tỉnh A năm nay tăng 1,2%, còn tỉnh B tăng 1,1%. Tổng số dân hai tỉnh năm nay là 4045000 người. Tính số dân mỗi tỉnh năm ngoái và năm nay.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1: Gọi x là số cần tìm.

Khi đó, ta có:

$$\frac{23+x}{201-x} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow 5(23+x) = 3(201-x) \Leftrightarrow 8x = 488 \Leftrightarrow x = 61.$$

Vậy, số cần tìm bằng 81.

Bài 2: Gọi số lớn là x.

Từ giả thiết:

- Tổng hai số bằng 90, suy ra số nhỏ là 90 – x.
- Hiệu của chúng bằng 72, suy ra:

$$x - (90 - x) = 72 \Leftrightarrow x - 90 + x = 72 \Leftrightarrow 2x = 162 \Leftrightarrow x = 81.$$

Vậy, hai số cần tìm là 81 và 9.

Bài 3: Gọi số lớn là x.

Từ giả thiết:

- Tổng hai số bằng 33, suy ra số nhỏ là 33 – x.
- Số này gấp đôi số kia, suy ra:

$$x = 2(33 - x) \Leftrightarrow x = 66 - 2x \Leftrightarrow 3x = 66 \Leftrightarrow x = 22.$$

Vậy, hai số cần tìm là 22 và 11.

Bài 4: Gọi số lớn là x.

Từ giả thiết:

- Hiệu hai số bằng 9, suy ra số nhỏ là x – 9.
- Số này gấp đôi số kia, suy ra:

$$x = 2(x - 9) \Leftrightarrow x = 2x - 18 \Leftrightarrow x = 18.$$

Vậy, hai số cần tìm là 18 và 9.

Bài 5: Gọi số lớn là x.

Từ giả thiết:

- Hiệu hai số bằng 4, suy ra số nhỏ là x – 4.
- Tỉ số giữa chúng bằng $\frac{3}{2}$, suy ra:

$$\frac{x}{x-4} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2x = 3(x - 4) \Leftrightarrow 2x = 3x - 12 \Leftrightarrow x = 12.$$

Vậy, hai số cần tìm là 12 và 8.

Bài 6: Gọi tử số là x.

Từ giả thiết:

- Tử số bé hơn mẫu số là 11, suy ra mẫu số là x + 11.

  Và khi đó phân số có dạng $\frac{x}{x+11}$
- Nếu tăng tử số lên 3 đơn vị và giảm mẫu số đi 5 đơn vị thì được một phân số bằng $\frac{2}{3}$, suy ra:

$$\frac{x+3}{(x+11)-5} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{x+3}{x+6} = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3(x + 3) = 2(x + 6) \Leftrightarrow 3x + 9 = 2x + 12 \Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy, phân số cần tìm là $\frac{3}{14}$.

Bài 7: Gọi số sách trong ngăn thứ II là x.

Từ giả thiết:

- Số sách ở ngăn I gấp ba số sách ở ngăn II, suy ra nó có 3x cuốn.
- Sau khi chuyển 20 cuốn sách từ ngăn I sang ngăn II thì

  Số sách ở ngăn I còn 3x – 20 cuốn

  Số sách ở ngăn II là x + 20 cuốn

Khi đó, ta có:

$$x + 20 = \frac{5}{7}(3x - 20) \Leftrightarrow 7x + 140 = 15x - 100 \Leftrightarrow 8x = 240 \Leftrightarrow x = 30.$$

Vậy, số sách ở ngăn thứ I bằng 90 cuốn và số sách ở ngăn thứ II bằng 30 cuốn.

Bài 8: Gọi x là tổng số học sinh đi tham quan.

Từ giả thiết:

- Số học sinh khối 6 bằng $\frac{2}{5}x = \frac{2x}{5}$.
- Số học sinh khối 7 bằng $\frac{3}{4}.\frac{2x}{5} = \frac{3x}{10}$.

Khi đó, ta có:

$$\frac{2x}{5} + \frac{3x}{10} + 135 = x \Leftrightarrow 4x + 3x + 1350 = 10x \Leftrightarrow 3x = 1350 \Leftrightarrow x = 450 \text{ người.}$$

Vậy, tổng số học sinh đi tham quan là 450 người.

Bài 9: Gọi x là số năm cần thiết.

Sau x năm thì:

- Tuổi của mẹ bằng 37 + x.
- Tuổi của con bằng 7 + x.

Khi đó, ta có: $37 + x = 3(7 + x) \Leftrightarrow 2x = 16 \Leftrightarrow x = 8$

Vậy, sau 8 năm thì tuổi mẹ gấp ba tuổi con.

Bài 10: Gọi x là số cần tìm.

Từ giả thiết:

- Khi viết thêm một chữ số 4 vào cuối của số đó, ta được số mới có giá trị bằng 10x + 4.

Khi đó, ta có: $10x + 4 = x + 1219 \Leftrightarrow 9x = 1215 \Leftrightarrow x = 135$.

Vậy, số cần tìm là 135.

Bài 11: Gọi x là số học sinh lớp 8A.

Từ giả thiết:

- Hai lớp 8A và 8B có tổng cộng 94 học sinh, suy ra lớp 8B có 94 – x học sinh.
- 25% số học sinh 8A đạt loại giỏi bằng $\frac{25x}{100} = \frac{x}{4}$ học sinh.
- 20% số học sinh 8B đạt loại giỏi bằng $\frac{20(94 - x)}{100} = \frac{94 - x}{5}$ học sinh.

Khi đó, ta có: $\frac{x}{4} + \frac{94 - x}{5} = 21 \Leftrightarrow 5x + 4(94 - x) = 420 \Leftrightarrow x = 44$.

Vậy, lớp 8A có 44 học sinh và lớp 8B có 50 học sinh.

Bài 12: Gọi x giờ là số thời gian cần thiết.

Sau x giờ, ta có:

- Người thứ nhất đi được một quãng đường là 12x, khi đó sẽ còn cách B một đoạn bằng 60 – 12x.
- Người thứ hai đi được một quãng đường là 15x, khi đó sẽ còn cách B một đoạn bằng 60 – 15x.

Khi đó, ta có: $60 - 12x = 2(60 - 15x) \Leftrightarrow 18x = 60 \Leftrightarrow x = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3} = 3$ giờ 20 phút.

Vậy, sau 3 giờ 20 phút thì người thứ nhất cách B một quãng đường gấp đôi khoảng cách từ người thứ hai đến B

Bài 13: Gọi x là độ dài quãng đường AB.

Từ giả thiết:

- Người đó đi từ A đến B hết $\frac{x}{30}$ giờ.
- Người đó đi từ B về A hết $\frac{x}{40}$ giờ.

Khi đó, ta có:

$$\frac{x}{30} - \frac{x}{40} = \frac{45}{60} \Leftrightarrow \frac{x}{3} - \frac{x}{4} = \frac{15}{2} \Leftrightarrow 4x - 3x = 90 \Leftrightarrow x = 90.$$

Vậy, quãng đường AB dài 90km.

Bài 14: Gọi vận tốc của canô là x km/h.

Từ giả thiết:

- Độ dài đường sông từ A đến B bằng $x.3\frac{1}{3} = \frac{10x}{3}$.
- Vận tốc ôtô bằng x + 17.
- Độ dài đường bộ từ A đến B bằng 2(x + 17).

Khi đó, ta có: $2(x + 17) - \frac{10x}{3} = 2 \Leftrightarrow 6(x + 17) - 10x = 6 \Leftrightarrow 4x = 96 \Leftrightarrow x = 24.$

Vậy, vận tốc của canô là 24km/h.

Bài 15: Gọi vận tốc riêng của canô là x km/h.

Từ giả thiết:

- Vận tốc khi đi của canô khi đi xuôi dòng bằng x + 3.
- Vận tốc khi đi của canô khi đi ngược dòng bằng x − 3.

Khi đó, ta có: $\frac{4}{3}(x + 3) = 2(x - 3) \Leftrightarrow 4(x + 3) = 6(x - 3) \Leftrightarrow 2x = 30 \Leftrightarrow x = 15.$

Vậy, vận tốc riêng của canô là 15km/h.

Bài 16: Gọi vận tốc của người thức nhất là x km/h.

Từ giả thiết:

- Thời gian để đi từ A đến B của người thứ nhất bằng $\frac{120}{x}$.
- Trên nửa đầu của quãng đường người thứ hai đi với vận tốc x + 10, do đó thời gian đi bằng $\frac{60}{x+10}$.
- Trên nửa sau của quãng đường người thứ hai đi với vận tốc x − 6, do đó thời gian đi bằng $\frac{60}{x-6}$.

Khi đó, ta có: $\frac{60}{x+10} + \frac{60}{x-6} = \frac{120}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x+10} + \frac{1}{x-6} = \frac{2}{x}$

$\Leftrightarrow x(x - 6) + x(x + 10) = 2(x + 10)(x - 6)$

$\Leftrightarrow 4x = 8x - 120 \Leftrightarrow 4x = 120 \Leftrightarrow x = 30.$

Vậy, người thứ nhất đi với vận tốc 30km/h.

Bài đọc thêm

PHƯƠNG TRÌNH CÓ HỆ SỐ CHỮ

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Chúng ta sẽ bắt đầu với việc giải phương trình: $ax - 8 = 0 \Leftrightarrow ax = 8 \Leftrightarrow x = \frac{8}{a}$.

Vậy, phương trình có nghiệm $x = \frac{8}{a}$.

☞ *Nhận xét*: Ta thấy ngay:

1. Với $a = 1$ thì lời giải trên là đúng.
2. Với $a = 0$ thì $\frac{8}{a}$ không xác định do đó lời giải trên là sai.

Như vậy, khi giải phương trình có hệ số chữ, ta cần chú ý đến các trường hợp bằng 0 và khác 0 của hệ số của x, đó được gọi là " *Giải và biện luận phương trình theo tham số* ". Để tiện theo dõi, trước khi trình bày bài toán tổng quát chúng ta đi giải và biện luận lại phương trình $ax - 8 = 0$ như sau:

Biến đổi phương trình về dạng: $ax = 8$. (*)

Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $a = 0$ thì (*) $\Leftrightarrow 0x = 8$, mâu thuẫn $\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Trường hợp 2. Nếu $a \neq 0$ thì (*) $\Leftrightarrow x = \frac{8}{a}$, phương trình có nghiệm duy nhất.

2. GIẢI VÀ BIỆN LUẬN PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Bài toán: Giải và biện luận phương trình $ax + b = 0$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Viết lại phương trình dưới dạng: $ax = -b$. (1)

Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $a = 0$.

$(1) \Leftrightarrow 0 = -b \Leftrightarrow b = 0$.

Vậy, ta được:

- Nếu $b = 0$, phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- Nếu $b \neq 0$, phương trình vô nghiệm.

Trường hợp 2: Nếu $a \neq 0$.

$(1) \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$, tức là phương trình có nghiệm duy nhất.

Kết luận:

- Với $a \neq 0$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = -\frac{b}{a}$.
- Với $a = b = 0$, phương trình nghiệm đúng với mọi x.
- Với $a = 0$ và $b \neq 0$, phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 1: *Giải và biện luận phương trình*: $m^2x + 6 = 4x + 3m$.

Giải

Viết lại phương trình dưới dạng: $(m^2 - 4)x = 3m - 6$. (1)

Trường hợp 1: Nếu $m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

- Với $m = 2$, ta được: $(1) \Leftrightarrow 0.x = 0$.
  Vậy, phương trình nghiệm đúng với mọi x.
- Với $m = -2$, ta được: $(1) \Leftrightarrow 0x = -12$.
  Vậy, phương trình vô nghiệm.

Trường hợp 2: Nếu $m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$ và $m \neq -2$

$$(1) \Leftrightarrow x = \frac{3}{m+2}.$$

Kết luận:

- Với $m \neq \pm 2$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{3}{m+2}$.
- Với $m = 2$, phương trình nghiệm đúng với mọi x.
- Với $m = -2$, phương trình vô nghiệm.

☛ ***Nhận xét***: Trong thí dụ trên, ta thấy tồn tại đầy đủ các khả năng được minh hoạ trong bài toán tổng quát, tuy nhiên sẽ tồn tại những bài toán là một trường hợp đặc biệt:

- Hệ số $a \neq 0$ với mọi giá trị của tham số, khi đó ta kết luận ngay tính duy nhất nghiệm của phương trình.
- Hệ số $a = 0$ với mọi giá trị của tham số, khi đó ta biện luận cho b.

Ví dụ 2: *Giải và biện luận phương trình*: $m^2x + 1 = m - x$.

Giải

Viết lại phương trình dưới dạng: $(m^2 + 1)x = m - 1$. (1)

Ta có: $m^2 + 1 \neq 0$, với mọi m.

Do đó: $(1) \Leftrightarrow x = \frac{m-1}{m^2+1}$.

Vậy, phương trình luôn có nghiệm duy nhất $x = \frac{m-1}{m^2+1}$.

Ví dụ 3: *Giải và biện luận phương trình*: $m(x + 3) = m(x + 4) + 6$.

Giải

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$mx + 3m = mx + 4m + 6 \Leftrightarrow mx - mx = 4m - 3m + 6$$

$$\Leftrightarrow m + 6 = 0 \Leftrightarrow m = -6.$$

Kết luận:

- Với $m = -6$, phương trình nhận mọi x làm nghiệm.
- Với $m \neq -6$, phương trình vô nghiệm.

Chú ý: Trong trường hợp bài toán có nhiều tham số chúng ta cần khéo léo biện luận theo các tham số đó để vét cạn được các trường hợp.

Ví dụ 4: *Giải và biện luận phương trình*: $\frac{x+a}{b-a} + \frac{x-a}{b+a} = \frac{2}{a^2-b^2}$. (1)

Giải

Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} b - a \neq 0 \\ b + a \neq 0 \\ a^2 - b^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \neq \pm b.$

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$-(a + b)(x + a) + (a - b)(x - a) = 2 \Leftrightarrow -bx = a^2 + 1.$$

Khi đó:

- Với $b = 0$, phương trình vô nghiệm.
- Với $b \neq 0$, phương trình có nghiệm $x = -\frac{a^2+1}{b}$.

Kết luận:

- Với $b = 0$ hoặc $a = \pm b$, phương trình vô nghiệm.
- Với $b \neq 0$ hoặc $a \neq \pm b$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = -\frac{a^2+1}{b}$.

Chú ý: Thông thường, khi thực hiện bài toán trên các em học sinh hay mắc phải lỗi ngộ nhận rằng kết luận là:

- Với $b = 0$, phương trình vô nghiệm.
- Với $b \neq 0$, phương trình có nghiệm $x = -\frac{a^2+1}{b}$.

Hãy nhớ rằng, việc kết luận cần phải được kết hợp với điều kiện có nghĩa của phương trình.

B. LUYỆN TẬP

Ví dụ 1: *Giải và biện luận phương trình:* $\dfrac{2x+a}{a-2} - \dfrac{a-2x}{a+2} = \dfrac{6a}{a^2-4}$. (1)

Giải

Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} a-2 \neq 0 \\ a+2 \neq 0 \\ a^2-4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \neq \pm 2.$

Viết lại phương trình dưới dạng:

$(2x + a)(a + 2) - (a - 2x)(a - 2) = 6a$

$\Leftrightarrow 2ax + 4x + a^2 + 2a - a^2 + 2a + 2ax - 4x = 6a$

$\Leftrightarrow 4ax + 4a = 6a \Leftrightarrow 4ax = 2a.$ (2)

Trường hợp 1: Nếu $a \neq 0$

$(2) \Leftrightarrow x = \dfrac{2a}{4a} = \dfrac{1}{2}$.

Trường hợp 2: Nếu $a = 0$.

$(2) \Leftrightarrow 0.x = 0$, phương trình nghiệm đúng với mọi x.

Kết luận:

- Với $a \neq 0$ và $a \neq \pm 2$, phương trình có một nghiệm $x = \dfrac{1}{2}$.
- Với $a = 0$, phương trình nghiệm đúng với mọi x.
- Với $a = \pm 2$, phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 2: *Giải và biện luận phương trình:* $a^2x = a(x + b) - b$. (1)

Giải

Viết lại phương trình dưới dạng: $a(a - 1)x = b(a - 1)$. (2)

Trường hợp 1: Nếu $a(a - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 1 \end{array}\right.$.

Với $a = 0$, ta được:

$(2) \Leftrightarrow 0x = -b$.

- Với $b = 0$, phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in R$.
- Với $b \neq 0$, phương trình vô nghiệm.

Với $a = 1$, ta được:

$(2) \Leftrightarrow 0x = 0$, phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in R$.

Trường hợp 2: Nếu $a(a - 1) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$.

Khi đó: (2) $\Leftrightarrow x = \frac{b}{a}$: phương trình có nghiệm duy nhất.

Kết luận:

- Với a = b = 0 hoặc a = 1, phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in R$.
- Với a = 0 và $b \neq 0$, phương trình vô nghiệm.
- Với $a \neq 0$ và $a \neq 1$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{b}{a}$.

Ví dụ 3: *Giải và biện luận phương trình:*

$$(m - 2)x^2 - (2m - 1)x + m + 1 = 0. \quad (1)$$

✍ *Giải*

Biến đổi phương trình về dạng:

$$[(m - 2)x - m - 1](x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ (m-2)x = m+1 \quad (2) \end{array}\right.$$

Ta đi giải và biện luận (2).

Trường hợp 1: Nếu $m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$.

(2) $\Leftrightarrow 0x = 3$ mâu thuẫn $\Rightarrow$ (2) vô nghiệm.

Trường hợp 2: Nếu $m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$

(2) $\Leftrightarrow x = \frac{m+1}{m-2}$.

Kết luận:

- Với m = 2, phương trình có nghiệm duy nhất x = 1.
- Với $m \neq 2$, phương trình có 2 nghiệm x = 1 và $x = \frac{m+1}{m-2}$.

☞ ***Nhận xét***: Bằng việc biến đổi phương trình ban đầu về dạng tích ta đã biện luận được một phương trình bậc 2, tuy nhiên sau này ta có được một phương pháp tổng quát hơn để giải và biện luận một phương trình bậc hai bất kỳ.

Ví dụ 4: *Giải và biện luận phương trình:* $\frac{mx - m - 3}{x + 1} = 1$. (1)

✍ *Giải*

Điều kiện xác định của phương trình là: $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$.

Biến đổi (1) về dạng: $(m - 1)x = m + 4$. (2)

Trường hợp 1: Nếu $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

(2) $\Leftrightarrow 0 = 5$ mâu thuẫn $\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Trường hợp 2: Nếu $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$.

(2) $\Leftrightarrow x = \frac{m+4}{m-1}$.

Kiểm tra điều kiện: $x \neq -1 \Leftrightarrow \dfrac{m+4}{m-1} \neq -1 \Leftrightarrow m \neq -\dfrac{3}{2}$.

Kết luận:

- Với $m = 1$ hoặc $m = -\dfrac{3}{2}$, phương trình vô nghiệm.
- Với $m \neq 1$ hoặc $m \neq -\dfrac{3}{2}$, phương trình có nghiệm $x = \dfrac{m+4}{m-1}$.

Ví dụ 5: *Giải và biện luận phương trình:*

$$\frac{a}{ax-1} + \frac{b}{bx-1} = \frac{a+b}{(a+b)x-1}. \qquad (1)$$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} ax-1 \neq 0 \\ bx-1 \neq 0 \\ (a+b)x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax \neq 1 \\ bx \neq 1 \\ (a+b)x \neq 1 \end{cases}$. (I)

Viết lại phương trình dưới dạng:

$abx[(a+b)x-2] = 0$. (2)

Trường hợp 1: Nếu $a = b = 0$.

Điều kiện (I) luôn đúng, khi đó:

(2) $\Leftrightarrow 0x = 0$, phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in R$.

Trường hợp 2: Nếu: $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$.

Điều kiện (I) trở thành $x \neq \dfrac{1}{b}$, khi đó:

(2) $\Leftrightarrow 0x = 0$, phương trình nghiệm đúng với mọi $x \neq \dfrac{1}{b}$.

Trường hợp 3: Nếu: $\begin{cases} a \neq 0 \\ b = 0 \end{cases}$.

Điều kiện (I) trở thành $x \neq \dfrac{1}{a}$, khi đó:

(2) $\Leftrightarrow 0x = 0$, phương trình nghiệm đúng với $\forall x \neq \dfrac{1}{a}$.

Trường hợp 4: Nếu: $\begin{cases} a \neq 0 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow b = -a \neq 0$.

Điều kiện (I) trở thành $x \neq \dfrac{1}{a}$ và $x \neq \dfrac{1}{b}$.

Khi đó (2) $\Leftrightarrow x = 0$, là nghiệm duy nhất của phương trình.

Trường hợp 5: Nếu: $\begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \\ a + b \neq 0 \end{cases}$.

Điều kiện (I) trở thành $x \neq \dfrac{1}{a}$ và $x \neq \dfrac{1}{b}$ và $x \neq \dfrac{1}{a+b}$.

$$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{2}{a+b} \end{array}\right.$$

- Nghiệm $x = \dfrac{2}{a+b}$ chỉ thoả mãn điều kiện khi $a \neq b$.

Kết luận:

- Với $a = b = 0$, phương trình nghiệm đúng với mọi x.
- Với $a = 0$ và $b \neq 0$, phương trình nghiệm đúng với mọi $x \neq \dfrac{1}{b}$.
- Với $a \neq 0$ và $b = 0$, phương trình nghiệm đúng với mọi $x \neq \dfrac{1}{a}$.
- Với $b = \pm a \neq 0$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.
- Với $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a + b \neq 0$, $a \neq b$, phương trình có nghiệm $x = 0$ và $x = \dfrac{2}{a+b}$.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Giải và biện luận các phương trình:

a. $m^2(x + 1) = x + m$.

b. $(m + 1)^2x - m = (2m + 5)x + 2$.

Bài 2: Giải và biện luận các phương trình:

a. $\dfrac{x}{2} - \dfrac{x-2}{a} = 0$.

b. $\dfrac{x-a}{a+2} + \dfrac{x-1}{a-2} = 0$.

Bài 3: Giải và biện luận các phương trình:

a. $\dfrac{x}{a-1} - \dfrac{2}{a+1} = \dfrac{4x}{a^2-1}$.

b. $\dfrac{ax-1}{a+1} - \dfrac{x+a}{1-a} = \dfrac{a^2+1}{a^2-1}$.

Bài 4: Giải và biện luận các phương trình:

a. $\dfrac{x+a}{b} = \dfrac{x}{a} + \dfrac{a}{b}$.

b. $\dfrac{x+a}{b} = 2 + \dfrac{x-b}{a}$.

Bài 5: Giải và biện luận các phương trình:

a. $a(ax + 2b^2) - a^2 = b^2(x + a)$.

b. $a(x - b) - 1 = b(1 - 2x)$.

c. $\dfrac{x+a}{b-a} + \dfrac{x-a}{b+a} = \dfrac{2}{a^2-b^2}$.

Bài 6: Giải và biện luận các phương trình:

a. $\dfrac{ax-1}{x-1} + \dfrac{2}{x+1} = \dfrac{a(x^2+1)}{x^2-1}$.

b. $\dfrac{a}{x-a} + \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{a-1}{x-a} + \dfrac{a+1}{x+1}$.

Bài 7: Xác định m để các phương trình sau có nghiệm duy nhất

a. $\dfrac{x-m}{x+1}=\dfrac{x-2}{x-1}$. b. $\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{x+2}{x-m}$.

Bài 8: Xác định m để các phương trình sau có tập hợp nghiệm là **R**

a. $m(m^2x-1)=1-x$. b. $m^2(mx-1)=2m(2x+1)$.

Bài 9: Xác định m để các phương trình sau vô nghiệm:

a. $(m-1)^2x=4x+m+1$.

b. $m^2(x-1)=2(mx-2)$.

c. $\dfrac{x-m}{x-1}+\dfrac{x-2}{x+1}=2$.

Bài 10: *Tìm m để phương trình: $(x^2-1)(x+3)(x+5)=m$

có 4 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn điều kiện: $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}+\dfrac{1}{x_4}=-1$.

Bài 11: *Giải và biện luận phương trình: $x^3-3x^2+3(m+1)x-(m+1)^2=0$.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 5.

c. Điều kiện $a \neq \pm b$.

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$-(a+b)(x+a)+(a-b)(x-a)=2 \Leftrightarrow -bx=a^2+1$$

- Với $b=0$, phương trình vô nghiệm.
- Với $b \neq 0$, phương trình có nghiệm $x=-\dfrac{a^2+1}{b}$.

Bài 7.

b. Điều kiện $x \neq 1$ và $x \neq m$.

Viết lại phương trình dưới dạng: $mx=2-m$. (2)

Do đó (1) có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \dfrac{2-m}{m} \neq 1 \\ \dfrac{2-m}{m} \neq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \\ m^2+m-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \notin \{-2,0,1\}.$$

Vậy với $m \notin \{-2,0,1\}$ phương trình (1) có nghiệm duy nhất.

Bài 8.

a. Viết lại phương trình dưới dạng: $(m^3+1)x=m+1$. (2)

Do đó để (1) có tập hợp nghiệm là R $\Leftrightarrow \begin{cases} m^3+1=0 \\ m+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow m=-1$.

Vậy với $m=-1$ phương trình (1) có tập hợp nghiệm là **R**.

Bài 9.

c. Điều kiện $x \neq \pm 1$.

Viết lại phương trình dưới dạng: $(m + 2)x = 4 - m$. (2)

Trường hợp 1: Nếu $m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -2$.

$(2) \Leftrightarrow 0x = 6$ (MT) $\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Trường hợp 2: Nếu $m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$.

$$(2) \Leftrightarrow x = \frac{4-m}{m+2}.$$

Do đó (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{4-m}{m+2} = 1 \\ \dfrac{4-m}{m+2} = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow m = 1.$

Vậy với $m = -2$ hoặc $m = 1$ phương trình (1) vô nghiệm.

☞ ***Nhận xét***: Trong lời giải trên chúng ta trình bày theo các bước của bài toán giải biện luận, tuy nhiên cũng có thể trình bày dưới dạng:

Điều kiện $x \neq \pm 1$.

Viết lại phương trình dưới dạng: $(m + 2)x = 4 - m$. (2)

Phương trình (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m+2=0 \\ 4-m \neq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m+2 \neq 0 \\ \dfrac{4-m}{m+2} = 1 \vee \dfrac{4-m}{m+2} = -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = 1 \end{array}\right.$

Tuy nhiên cách trình bày kiểu này có thể khiến một vài em học sinh thấy phức tạp. Do vậy nếu bài toán yêu cầu " *Tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm (hoặc vô nghiệm)* " tốt nhất các em hãy trình bày theo các bước của bài toán giải biện luận.

Bài 10. Ta có: $(x^2 - 1)(x + 3)(x + 5) = m$ (1)

$\Leftrightarrow (x + 1)(x + 3)(x - 1)(x + 5) = m$

$\Leftrightarrow (x^2 + 4x + 3)(x^2 + 4x - 5) = m$ (2)

Đặt $y = x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 \geq 0$, khi đó (2) có dạng:

$(y - 1)(y - 9) = m \Leftrightarrow y^2 - 10y - (9 + m) = 0$ (3)

Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt tương đương phương trình (3) có hai nghiệm dương phân biệt $y_1 > y_2 > 0$.

$$\begin{cases} \Delta' = 16 + m > 0 \\ S = y_1 + y_2 = 10 > 0 \\ P = y_1.y_2 = 9 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -16 < m < 9 \quad (4)$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2 + 4x + 4 - y_1 = 0$ (5)

và x_3, x_4 là hai nghiệm của phương trình: $x^2 + 4x + 4 - y_2 = 0$ (6)

Theo định lí Viét và (3), (5), (6) ta có:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=\frac{x_1+x_2}{x_1.x_2}+\frac{x_3+x_4}{x_3.x_4}=\frac{-4}{4-y_1}-\frac{4}{4-y_2}$$

$$=\frac{4(y_1+y_2)-32}{16-4(y_1+y_2)+y_1.y_2}=\frac{40-32}{16-40+9-m}=\frac{8}{-15-m}=-1$$

Từ đó, ta có $m = -7$ thỏa mãn điều kiện (4)

Bài 11. Chúng ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với $m = -1$, phương trình có dạng:

$$x^3-3x^2=0 \Leftrightarrow x^2(x-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right..$$

Vậy, với $m = -1$ phương trình có hai nghiệm $x = 0$ và $x = 3$.

Trường hợp 2: Với $m \neq -1$, nhân hai vế của phương trình với $m + 1$, ta được:

$$(m+1)x^3-3(m+1)x^2+3(m+1)^2x-(m+1)^3=0$$

$$\Leftrightarrow x^3-3(m+1)x^2+3(m+1)^2x-(m+1)^3=-mx^3$$

$$\Leftrightarrow (x-m-1)^3=-mx^3 \Leftrightarrow x-m-1=-x\sqrt[3]{m}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{m+1}{\sqrt[3]{m}+1}=\sqrt[3]{m^2}-\sqrt[3]{m}+1.$$

Vậy, với $m \neq -1$ phương trình có nghiệm $x=\sqrt[3]{m^2}-\sqrt[3]{m}+1$.

☛ ***Nhận xét***:

1. Bài toán trên đã minh hoạ một phương pháp để giải phương trình bậc ba dạng:

   $x^3-3x^2+3mx-m^2=0,$

   bằng cách xét hai trường hợp:

   Trường hợp 1: Với $m = 0$, phương trình có dạng: $x^3-3x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right..$

   Vậy, với $m = 0$ phương trình có hai nghiệm $x = 0$ và $x = 3$.

   Trường hợp 2: Với $m \neq 0$, nhân hai vế của phương trình với m, ta được:

   $$mx^3-3mx^2+3m^2x-m^3=0$$

   $$\Leftrightarrow x^3-3mx^2+3m^2x-m^3=(1-m)x^3$$

   $$\Leftrightarrow (x-m)^3=(1-m)x^3 \Leftrightarrow x-m=x\sqrt[3]{1-m}$$

   $$\Leftrightarrow x=\frac{m}{1+\sqrt[3]{m-1}}=\sqrt[3]{(m-1)^2}-\sqrt[3]{m-1}+1.$$

   Vậy, với $m \neq 0$ phương trình có nghiệm: $x=\sqrt[3]{(m-1)^2}-\sqrt[3]{m-1}+1$.

2. Phương pháp được mở rộng tự nhiên cho phương trình bậc ba dạng:

   $x^3+3x^2+3mx+m^2=0.$

CHƯƠNG IV – BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

CHỦ ĐỀ 1

MỐI LIÊN HỆ GIỮA THỨ TỰ VỚI PHÉP CỘNG VÀ PHÉP NHÂN

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. NHẮC LẠI VỀ THỨ TỰ TRÊN TẬP SỐ

Trên tập số thực, với hai số a và b sẽ xảy ra một trong các trường hợp sau:

- Số a *bằng* số b, kí hiệu là $a = b$.
- Số a *nhỏ hơn* số b, kí hiệu là $a < b$.
- Số a *lớn hơn* số b, kí hiệu là $a > b$.

từ đó ta có thêm nhận xét:

- Nếu a *không nhỏ hơn* b thì $a = b$ hoặc $a > b$, khi đó ta nói a *lớn hơn hoặc bằng b*, kí hiệu là $a \geq b$.
- Nếu a *không lớn hơn* b thì $a = b$ hoặc $a < b$, khi đó ta nói a *nhỏ hơn hoặc bằng b*, kí hiệu là $a \leq b$.

2. BẤT ĐẲNG THỨC

Bất đẳng thức là hệ thức có một trong các dạng:

$A > B$, $A \geq B$, $A < B$, $A \leq B$.

3. LIÊN HỆ GIỮA THỨ TỰ VÀ PHÉP CỘNG

Tính chất: Với ba số a, b và c, ta có:

- Nếu $a > b$ thì $a + c > b + c$.
- Nếu $a \geq b$ thì $a + c \geq b + c$.
- Nếu $a < b$ thì $a + c < b + c$.
- Nếu $a \leq b$ thì $a + c \leq b + c$.

Khi cộng cùng một số vào cả hai vế của một bất đẳng thức ta được bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.

4. LIÊN HỆ GIỮA THỨ TỰ VÀ PHÉP NHÂN

Tính chất 1: Với ba số a, b và $c > 0$, ta có:

- Nếu $a > b$ thì $a.c > b.c$ và $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.
- Nếu $a \geq b$ thì $a.c \geq b.c$ và $\frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$.
- Nếu $a < b$ thì $a.c < b.c$ và $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.
- Nếu $a \leq b$ thì $a.c \leq b.c$ và $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$.

Khi nhân hoặc chia cả hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số dương ta được bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.

Tính chất 2: Với ba số a, b và $c < 0$, ta có:

- Nếu $a > b$ thì $a.c < b.c$ và $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.
- Nếu $a \geq b$ thì $a.c \leq b.c$ và $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$.
- Nếu $a < b$ thì $a.c > b.c$ và $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.
- Nếu $a \leq b$ thì $a.c \geq b.c$ và $\frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$.

Khi nhân hoặc chia cả hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số âm ta được bất đẳng thức mới ngược chiều với bất đẳng thức đã cho.

5. TÍNH CHẤT BẮC CẦU CỦA THỨ TỰ

Tính chất: Với ba số a, b và c, nếu $a > b$ và $b > c$ thì $a > c$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: (Bài 1/tr 37 – Sgk): *Mỗi khẳng định sau đúng hay sai? Vì sao?*

a. $(-2) + 3 \geq 2$. b. $-6 \leq 2.(-3)$.

c. $4 + (-8) < 15 + (-8)$. d. $x^2 + 1 \geq 1$.

Giải

a. Khẳng định $(-2) + 3 \geq 2$ là sai.

b. Khẳng định $-6 \leq 2.(-3)$ là đúng.

c. Khẳng định $4 + (-8) < 15 + (-8)$ là đúng.

d. Khẳng định $x^2 + 1 \geq 1$ là đúng vì: $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 1$.

Ví dụ 2: *Hãy xác định dấu của số* a, *biết*:

a. $6a > 3a$. b. $a \leq \frac{a}{2}$.

Giải

a. Ta viết lại: $6a > 3a \Leftrightarrow 6.a > 3.a$

tức là, bất đẳng thức trên có được sau khi nhân cả hai vế của bất đẳng thức đúng $6 > 3$ với a.

Vậy, từ sự cùng chiều của hai bất đẳng thức suy ra $a > 0$.

b. Ta viết lại: $a \leq \frac{a}{2} \Leftrightarrow 1.a \leq \frac{1}{2}.a$

tức là, bất đẳng thức trên có được sau khi nhân cả hai vế của bất đẳng thức đúng $1 > \frac{1}{2}$ với a. Vậy, từ sự ngược chiều của hai bất đẳng thức suy ra $a \leq 0$.

Ví dụ 3: (Bài 2/tr 37 – Sgk): *Cho* a < b, *hãy so sánh*:

a. a + 1 và b + 1 b. a – 2 và b – 2

Giải

a. Ta có: $a < b \Leftrightarrow a + 1 < b + 1$.

b. Ta có: $a < b \Leftrightarrow a - 2 < b - 2$.

Ví dụ 4: (Bài 3/tr 37 – Sgk): *Hãy so sánh* a *và* b *nếu*:

a. $a - 5 \geq b - 5$. b. $15 + a \leq 15 + b$.

Giải

a. Ta có: $a - 5 \geq b - 5 \Leftrightarrow a - 5 + 5 \geq b - 5 + 5 \Leftrightarrow a \geq b$.

b. Ta có: $15 + a \leq 15 + b \Leftrightarrow 15 + a - 15 \leq 15 + b - 15 \Leftrightarrow a \leq b$.

Ví dụ 5: *Cho bất đẳng thức* m > 0. *Nhân cả hai vế của bất đẳng thức với số nào thì được bất đẳng thức* $\frac{1}{m} > 0$.

Giải

Với bất đẳng thức giả thiết: m > 0 nhân cả hai vế của bất đẳng thức với $\frac{1}{m^2}$,

ta được: $m.\frac{1}{m^2} > 0.\frac{1}{m^2} \Leftrightarrow \frac{1}{m} > 0$.

Ví dụ 6: *Cho* a < b, *chứng minh rằng* 2a – 3 < 2b + 6.

Giải

Với bất đẳng thức giả thiết: a < b

nhân cả hai vế của bất đẳng thức với 2, ta được: 2a < 2b.

tiếp tục, cộng cả hai vế của bất đẳng thức với – 3, ta được: 2a – 3 < 2b – 3. (1)

Cộng cả hai vế của bất đẳng thức đúng – 3 < 6 với 2b, ta được:

2b – 3 < 2b + 6. (2)

Từ (1), (2) theo tính chất bắc cầu suy ra: 2a – 3 < 2b + 6, đpcm.

Ví dụ 7: *Cho* a > b > 0, *hãy chứng tỏ rằng*:

a. $a^2 > ab$. b. $a^3 > b^3$.

Giải

Với bất đẳng thức giả thiết: a > b

nhân cả hai vế của bất đẳng thức với a > 0, ta được: $a^2 > ab$, đpcm. (1)

Với bất đẳng thức giả thiết: a > b

Nhân cả hai vế của bất đẳng thức với $a^2 > 0$, ta được: $a^3 > a^2b$. (2)

Nhân cả hai vế của bất đẳng thức với b > 0, ta được: $ab > b^2$. (3)

Từ (1) và (3) suy ra: $a^2 > b^2$. (4)

Nhân cả hai vế của bất đẳng thức (4) với $b > 0$, ta được: $a^2b > b^3$. (5)

Từ (2) và (5) suy ra: $a^3 > b^3$, đpcm.

☞ ***Chú ý***: Bất đẳng thức $a^2 > ab$ vẫn đúng với điều kiện:

$a > b$ và $a > 0$ (hoặc $a < b$ và $a < 0$).

Bất đẳng thức $a^3 > b^3$ vẫn đúng với điều kiện $a > b$.

Ví dụ 8: *Cho* $a > b > 0$, *hãy chứng tỏ rằng* $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

✍ *Giải*

Từ giả thiết $a, b > 0$ suy ra $ab > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{ab} > 0$.

Với bất đẳng thức giả thiết: $a > b$ nhân cả hai vế của bất đẳng thức với $\frac{1}{ab}$, ta được:

$$a.\frac{1}{ab} > b.\frac{1}{ab} \Leftrightarrow \frac{1}{b} > \frac{1}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}\text{, đpcm.}$$

☞ ***Nhận xét***: Ta có kết quả tổng quát hơn "*Nếu* $a > b$ *thì* $\left[\begin{array}{l} \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \text{ nếu } ab > 0 \\ \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \text{ nếu } ab < 0 \end{array}\right.$".

Ví dụ 9: *Cho* $a < b$ *và* $c < d$, *hãy chứng tỏ rằng* $a + c < b + d$.

✍ *Giải*

Với bất đẳng thức giả thiết: $a < b$

cộng cả hai vế của bất đẳng thức với số c, ta được: $a + c < b + c$. (1)

Với bất đẳng thức giả thiết: $c < d$

cộng cả hai vế của bất đẳng thức với số b, ta được: $b + c < b + d$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $a + c < b + d$, đpcm.

☞ ***Nhận xét***:

1. Bất đẳng thức trên được phát biểu " *Khi cộng theo vế của hai bất đẳng thức cùng chiều ta được một bất đẳng thức mới cùng chiều với hai bất đẳng thức đã cho* ".
2. Ta còn có kết quả " *Nếu* $0 < a < b$ *và* $0 < c < d$ *thì* $a.c < b.d$ ".

Ví dụ 10: *Cho* a, b *bất kì, hãy chứng tỏ rằng*:

a. $a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$. b. $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$.

✍ *Giải*

a. Biến đổi tương đương bất đẳng thức:

$$a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$$, luôn đúng.

b. Với bất đẳng thức giả thiết: $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$ nhân cả hai vế của bất đẳng thức với 2, ta được: $a^2 + b^2 \geq 2ab$

tiếp tục, cộng cả hai vế của bất đẳng thức trên với $-2ab$, ta được:

$$a^2 + b^2 - 2ab \geq 2ab - 2ab \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$$, luôn đúng.

☞ ***Nhận xét:***

1. Qua ví dụ trên, chúng ta nhận thấy ngay rằng " *Để chứng minh một bất đẳng thức ngoài việc sử dụng các tính chất thứ tự với phép cộng và phép nhân chúng ta còn có thể sử dụng các phép biến đổi tương đương để biến đổi bất đẳng thức ban đầu về một bất đẳng thức luôn đúng hoặc ngược lại (xuất phát từ một bất đẳng thức đúng biến đổi về bất đẳng thức cần chứng minh)* ".

2. Xuất phát từ kết quả $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$, nếu đặt $x = a^2$, $y = b^2$ (khi đó $x, y \geq 0$) thì ta nhận được một bất đẳng thức dạng: $\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}$, với $x, y \geq 0$.

   Bất đẳng thức trên được gọi là *Bất đẳng thức Côsi.*

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Hãy sử dụng dấu " $>, \geq, <, \leq$ "để so sánh các số a và b, biết:

a. $a - b = 0$. b. $a - b = 1$. c. $b - a = 2$.

Bài 2: Hãy xác định dấu của số a, biết:

a. $4a < 3a$. b. $a \geq \frac{2a}{3}$.

Bài 3: Cho $a > b > 0$, hãy chứng tỏ rằng:

a. $b^2 < ab$ b. $a^2 > b^2$.

Bài 4: Cho bất đẳng thức $m < 0$. Nhân cả hai vế của bất đẳng thức với số nào thì được bất đẳng thức $\frac{1}{m} < 0$.

Bài 5: Cho $a > b$ và $ab < 0$, hãy chứng tỏ rằng $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Bài 6: Cho ví dụ chứng tỏ rằng từ a > b không thể suy ra $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Bài 7: Cho 0 < a < b và 0 < c < d, hãy chứng tỏ rằng a.c < b.d.

Bài 8: Chứng minh các bất đẳng thức:

a. $a^2 - 6a + 10 \geq 1$.

b. $(a - 3)(a - 5) + 2 > 0$.

c. $4a^4 - 4a^3 + a^2 \geq 0$.

d. $a^2 \geq 2b(a - b)$.

Bài 9: Chứng minh các bất đẳng thức:

a. $a^3 + b^3 - ab^2 - a^2b \geq 0$ với a, b là các số dương.

b. $a^5 + b^5 - a^4b - ab^4 \geq 0$ với a, b là các số dương.

c. $ab + bc + ca \leq 0$ nếu $a + b + c = 0$.

Bài 10: Chứng minh các bất đẳng thức:

a. $(a + b)^2 \geq 4ab$.

b. $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$.

c. $b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$.

Bài 11: Biết a > b > 0. Chứng minh rằng $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1: a. a = b. b. a > b. c. a < b.

Bài 2: a. a < 0. b. $a \geq 0$.

Bài 3: *Học sinh tự làm.*

Bài 4: Với m < 0, khi đó, ta nhân cả hai vế của bất đẳng thức với số $\frac{1}{m^2} > 0$ sẽ nhận được bất đẳng thức $\frac{1}{m} < 0$.

Bài 5: Ta lần lượt có nhận xét:

- Vì ab < 0 nên a và b trái dấu.
- Vì a > b nên kết hợp với nhận xét trên suy ra a > 0 và b < 0.

Khi đó: $\frac{1}{a} > 0$ và $\frac{1}{b} < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Bài 6: Chọn a = 2 và b = – 3, ta thấy ngay: a > b vì 2 > – 3.

$\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ là không thể bởi khi đó $\frac{1}{2} < -\frac{1}{3}$ là mâu thuẫn.

Bài 7: Ta lần lượt vận dụng:

- Vì 0 < a < b và c > 0 nên ac < bc. (1)
- Vì 0 < c < d và b > 0 nên bc < bd. (2)

Từ (1), (2) dựa trên tính chất bắc cầu suy ra a.c < b.d.

Bài 8:

a. Ta biến đổi: $a^2 - 6a + 10 \geq 1 \Leftrightarrow a^2 - 6a + 9 \geq 0$

$\Leftrightarrow (a - 3)^2 \geq 0$, luôn đúng.

b. Ta biến đổi:

$(a - 3)(a - 5) + 2 > 0 \Leftrightarrow a^2 - 8a + 17 > 0$

$\Leftrightarrow (a - 4)^2 + 1 > 0$, luôn đúng.

c. Ta biến đổi: $4a^4 - 4a^3 + a^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2(4a^2 - 4a + 1) \geq 0$

$\Leftrightarrow a^2(2a - 1)^2 \geq 0$, luôn đúng.

d. Ta biến đổi:

$a^2 \geq 2b(a - b) \Leftrightarrow a^2 - 2ab + 2b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 + b^2 \geq 0$, luôn đúng.

Bài 9:

a. Ta biến đổi: $a^3 + b^3 - ab^2 - a^2b \geq 0 \Leftrightarrow (a + b)(a^2 - ab + b^2) - ab(a + b) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a + b)(a^2 - 2ab + b^2) \geq 0 \Leftrightarrow (a + b)(a - b)^2 \geq 0$

Bất đẳng thức trên luôn đúng với a, b là các số dương (vì ta có $a + b > 0$).

b. Ta biến đổi: $a^5 + b^5 - a^4b - ab^4 \geq 0 \Leftrightarrow a^4(a - b) - b^4(a - b) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a^4 - b^4)(a - b) \geq 0 \Leftrightarrow (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)(a - b) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)(a - b) \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)^2(a + b)(a^2 + b^2) \geq 0$

Bất đẳng thức trên luôn đúng với a, b là các số dương (vì ta có $a + b > 0$).

c. Sử dụng giả thiết

$a + b + c = 0 \Leftrightarrow (a + b + c)^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 0$

$\Leftrightarrow ab + bc + ca = -\dfrac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) \leq 0$, đpcm

Bài 10:

a. Ta biến đổi:

$(a + b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab - 4ab \geq 0$

$\Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$, luôn đúng.

b. Ta biến đổi:

$\left(\dfrac{a + b}{2}\right)^2 \geq ab \Leftrightarrow (a + b)^2 \geq 4ab$, tiếp theo biến đổi như câu a).

c. Ta biến đổi:

$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$

$\Leftrightarrow a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 \geq a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2$

$\Leftrightarrow (ay - bx)^2 \geq 0$, luôn đúng.

Bài 11: Với $a > b > 0$ ta biến đổi:

$\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$, luôn đúng.

CHỦ ĐỀ 2

BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

Một bất phương trình với ẩn x có dạng:

$$A(x) > B(x) \text{ (hoặc } A(x) < B(x),\ A(x) \ge B(x),\ A(x) \le B(x))$$

trong đó vế trái A(x) và vế phải B(x) là hai biểu thức của cùng một biến x.

2. TẬP NGHIỆM CỦA BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Tập hợp tất cả các nghiệm của một bất phương trình được gọi là *tập nghiệm* của bất phương trình đó.

Khi bài toán yêu cầu *giải một bất phương trình*, ta phải tìm *tập nghiệm* của bất phương trình đó.

3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG

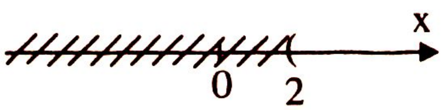
Hai bất phương trình có cùng một tập nghiệm là hai bất phương trình tương đương.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: TẬP NGHIỆM CỦA BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Ví dụ 1: *Ta có:*

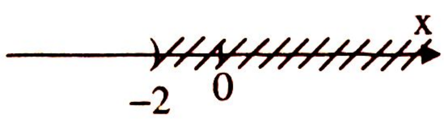
a. Tập nghiệm của bất phương trình $x > 2$ là tập hợp các số lớn hơn 2, tức là tập $\{x|\ x > 2\}$, nó được biểu diễn trên trục số như sau:



b. Tập nghiệm của bất phương trình $x \ge 3$ là tập hợp các số lớn hơn hoặc bằng 3, tức là tập $\{x|\ x \ge 3\}$, nó được biểu diễn trên trục số như sau:



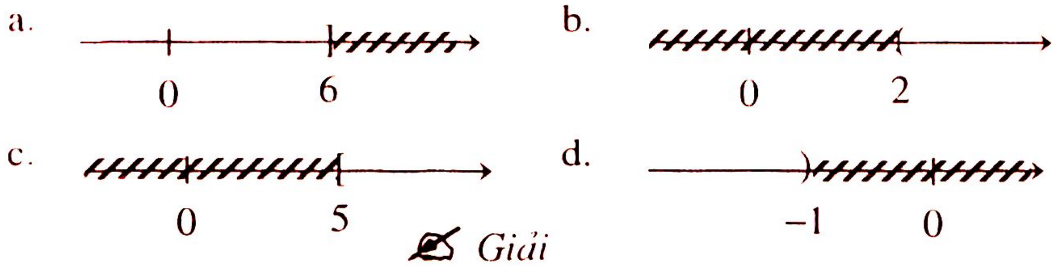
c. Tập nghiệm của bất phương trình $x < -2$ là tập hợp các số nhỏ hơn -2, tức là tập $\{x|\ x < -2\}$, nó được biểu diễn trên trục số như sau:



d. Tập nghiệm của bất phương trình $x \le 1$ là tập hợp các số nhỏ hơn hoặc bằng 1, tức là tập $\{x|\ x \le 1\}$, nó được biểu diễn trên trục số như sau:



Ví dụ 2: (Bài 17/tr 43 – Sgk): *Hình vẽ sau đây biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình nào? (Chỉ nêu một bất phương trình).*



Giải

a. Ta có:

$x \le 6$.

b. Ta có:

$x \ge 5$.

c. Ta có:

$x > 2$.

d. Ta có:

$x < -1$.

Ví dụ 3: *Cho bất phương trình:* $x^2 - 4x \le 2x - 8$.

Kiểm tra xem các giá trị sau của x *có phải là nghiệm của bất phương trình trên hay không?*

a. $x = 0$. b. $x = 3$. c. $x = 4$.

Giải

a. Thay $x = 0$ vào bất phương trình, ta được: $0 \le -8$, mâu thuẫn.
Vậy, $x = 0$ không phải là nghiệm của bất phương trình.

b. Thay $x = 3$ vào bất phương trình, ta được:

$$3^2 - 4.3 \le 2.3 - 8 \Leftrightarrow 9 - 12 \le 6 - 8 \Leftrightarrow -3 \le -2, \text{ luôn đúng.}$$

Vậy, $x = 3$ là nghiệm của bất phương trình.

c. Thay $x = 4$ vào bất phương trình, ta được:

$$4^2 - 4.4 \le 2.4 - 8 \Leftrightarrow 16 - 16 \le 8 - 8 \Leftrightarrow 0 \le 0, \text{ luôn đúng.}$$

Vậy, $x = 4$ là nghiệm của bất phương trình.

☞ ***Chú ý***: Ta có $0 \le 0$ cũng là một bất đẳng thức đúng, bởi:

$a \ge b$ khi và chỉ khi $a > b$ hoặc $a = b$.

Ví dụ 4: (Bài 15/tr 43 – Sgk): *Kiểm tra xem giá trị* $x = 3$ *là nghiệm của bất phương trình nào trong các bất phương trình sau:*

a. $2x + 3 < 9$. b. $-4x > 2x + 5$. c. $5 - x > 3x - 12$.

Giải

a. Thay $x = 3$ vào bất phương trình ta có: $2.3 + 3 < 9 \Leftrightarrow 9 < 9$ (mâu thuẫn)
Vậy, $x = 3$ không phải là nghiệm của bất phương trình.

b. Thay $x = 3$ vào bất phương trình ta có: $(-4).3 > 2.3 + 5 \Leftrightarrow -12 > 11$ (mâu thuẫn. Vậy, $x = 3$ không phải là nghiệm của bất phương trình.

c. Thay $x = 3$ vào bất phương trình ta có:

$$5 - 3 > 3.3 - 12 \Leftrightarrow 2 > -3 \text{ (luôn đúng)}$$

Vậy, $x = 3$ là nghiệm của bất phương trình.

Ví dụ 5: *Viết thành bất phương trình và chỉ ra một nghiệm của nó từ các mệnh đề sau:*

a. *Tổng của một số nào đó và* 4 *lớn hơn* 9.

b. *Hiệu của* 8 *và* 3 *lần số nào đó nhỏ hơn* 11.

✍ *Giải*

a. Gọi số cần tìm là x.

Từ giả thiết "*Tổng của x và 4 lớn hơn 9*", ta được: $x + 4 > 9$.

Ta có thể chọn $x = 6$ là một nghiệm của bất phương trình trên.

b. Gọi số cần tìm là x.

Từ giả thiết "*Hiệu của 8 và 3 lần số x nhỏ hơn 11*", ta được: $8 - 3x < 11$.

Ta có thể chọn $x = 0$ là một nghiệm của bất phương trình trên.

Ví dụ 6: (Bài 18/tr 43 – Sgk): *Hãy lập bất phương trình cho bài toán sau: Quãng đường đi từ* A *đến* B *dài* 50km. *Một ôtô đi từ* A *đến* B, *khởi hành lúc* 7 giờ. *Hỏi ôtô phải đi với vận tốc bao nhiêu* km/h *để đến* B *trước* 9 *giờ cùng ngày?*

✍ *Giải*

Gọi x là vận tốc trung bình của ôtô ($x > 0$, đơn vị: km/h).

Ôtô đi từ 7 giờ và đến trước 9 giờ tức là ôtô đi từ A đến B chưa tới 2 giờ.

Do đó, nếu ôtô đi đúng 2 giờ thì quãng đường ôtô đi được sẽ dài hơn quãng đường AB = 50km.

Suy ra, ta có bất phương trình: $2x > 50 \Leftrightarrow x > 25$.

Vậy, ôtô phải đi với vận tốc lớn hơn 25km/h thì mới đến được B trước 9 giờ.

Ví dụ 7: *Hãy chỉ ra hai nghiệm trái dấu cho các bất phương trình sau:*

a. $|x - 3| < 6$.　　　　b. $|x + 1| \geq 8$.

✍ *Giải*

a. Ta chọn được hai nghiệm là $x = -1$ và $x = 6$.

Thật vậy:

- Với $x = -1$, ta có: $|-1 - 3| < 6 \Leftrightarrow |-4| < 6 \Leftrightarrow 4 < 6$, luôn đúng.
- Với $x = 6$, ta có: $|6 - 3| < 6 \Leftrightarrow |3| < 6 \Leftrightarrow 3 < 6$, luôn đúng.

b. Ta chọn được hai nghiệm là $x = -9$ và $x = 8$, thật vậy:

- Với $x = -9$, ta có: $|-9 + 1| \geq 8 \Leftrightarrow |-8| \geq 8 \Leftrightarrow 8 \geq 8$, luôn đúng.
- Với $x = 8$, ta có: $|8 + 1| \geq 8 \Leftrightarrow |9| \geq 8 \Leftrightarrow 9 \geq 8$, luôn đúng.

Vấn đề 2: HAI BẤT PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG

Ví dụ 1: *Các cặp bất phương trình sau có tương đương không ? Vì sao ?*

a. $x^2 - 2 > x$ và $x^2 > x + 2$.　　　　b. $x + \frac{1}{x} < 1 + \frac{1}{x}$ và $x < 1$.

✍ *Giải*

a. Với bất phương trình: $x^2 - 2 > x$ cộng 2 vào hai vế của bất phương trình, ta được: $x^2 - 2 + 2 > x + 2 \Leftrightarrow x^2 > x + 2$.

Vậy, hai bất phương trình đã cho tương đương.

b. Nhận xét rằng, số 0 là nghiệm của bất phương trình thứ hai nhưng không là nghiệm của bất phương trình đầu.

Vậy, hai bất phương trình đã cho không tương đương.

Ví dụ 2: *Các cặp bất phương trình sau có tương đương không ? Vì sao ?*

a. $x + 1 < 2x$ và $3x < 4x - 1$. b. $x > 3$ và $x^2 - 4x + 3 > 0$.

✍ *Giải*

a. Với bất phương trình: $x + 1 < 2x$ cộng $2x - 1$ vào hai vế của bất phương trình, ta được: $x + 1 + 2x - 1 < 2x + 2x - 1 \Leftrightarrow 3x < 4x - 1$.

Vậy, hai bất phương trình đã cho tương đương.

b. Nhận xét rằng, $x = 0$ là nghiệm của bất phương trình thứ hai nhưng không là nghiệm của bất phương trình đầu.

Vậy, hai bất phương trình đã cho không tương đương.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Viết tập nghiệm của bất phương trình sau bằng kí hiệu tập hợp và biểu diễn tập nghiệm đó trên trục số:

a. $3 > x$. b. $x < -2$. c. $x \geq -1$. d. $x \leq 8$.

Bài 2: Cho ví dụ một bất phương trình có:

a. Tập hợp nghiệm là bất kì số nào.

b. Tập hợp nghiệm bằng $\varnothing$.

Bài 3: Tìm các số x thoả mãn cả hai bất phương trình sau:

a. $x > 3$ và $x < 8$. b. $x > 5$ và $x > 3$. c. $x > 2$ và $x < -1$.

Bài 4: Cho bất phương trình: $10x - 15 \geq x^2 + 6$.

Kiểm tra xem các giá trị sau của x có phải là nghiệm của bất phương trình trên hay không ?

a. $x = 5$. b. $x = -2$. c. $x = 7$.

Bài 5: Cho bất phương trình: $x + 20 > x^2$.

b. Hãy kiểm tra xem các số -5, 1, 3 có phải là nghiệm của bất phương trình không?

c. Gọi S là tập hợp các số x thoả mãn $-4 < x < 5$. Chọn một phần tử bất kì của tập hợp S, chứng tỏ nó là nghiệm của bất phương trình đã cho.

Bài 6: Cho bất phương trình: $x^2 + 3 > 4x$.

a. Hãy kiểm tra xem các số 0, 2, 4 có phải là nghiệm của bất phương trình không ?

b. Đặt $S = \{x \mid x < 1$ hoặc $x > 3\}$. Chọn một phần tử bất kì của tập hợp S, chứng tỏ nó là nghiệm của bất phương trình đã cho.

Bài 7: Viết thành bất phương trình và chỉ ra một nghiệm của nó từ các mệnh đề sau:

a. Tổng của 3 lần số nào đó và 8 lớn hơn -1.

b. Tổng của một số nào đó và 3 lớn hơn hoặc bằng 11.

c. Hiệu của 9 và 4 lần số nào đó không nhỏ hơn 8.

Bài 8: Hãy chỉ ra hai nghiệm trái dấu cho các bất phương trình sau:

a. $|x - 2| < 11$. c. $|2x + 1| \geq 3$.

b. $|3 - x| > 5$. d. $|1 - 3x| < 9$.

Bài 9: Các cặp bất phương trình sau có tương đương không ? Vì sao ?

a. $2 - x < 0$ và $x - 2 > 0$.

b. $|x - 2| < 0$ và $|2 - x| < 0$.

c. $x + \frac{2}{x} < 1 + \frac{2}{x}$ và $x < 1$.

d. $x < 1$ và $x^2 < 1$.

e. $x > 3$ và $x^2 > 9$.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1:

a. $S = \{x \in \mathbf{R} \mid x < 3\}$.

b. $S = \{x \in \mathbf{R} \mid x < -2\}$.

c. $S = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq -1\}$.

d. $S = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq 8\}$.

Việc biểu diễn tập nghiệm trên trục số dành cho các em học sinh.

Bài 2:

a. Bất phương trình $x^2 + 1 > 0$ có tập hợp nghiệm là bất kì số nào.

b. Bất phương trình $x^2 + 1 < 0$ có tập hợp nghiệm bằng $\varnothing$.

Bài 3: Tìm các số x thoả mãn cả hai bất phương trình sau:

a. $3 < x < 8$.

b. $x > 5$.

c. Không tồn tại.

Bài 4:

a. $x = 5$ là nghiệm của bất phương trình.

b. $x = -2$ không là nghiệm của bất phương trình.

c. $x = 7$ là nghiệm của bất phương trình.

Bài 5: *Học sinh tự làm.*

Bài 6: *Học sinh tự làm.*

Bài 7: *Học sinh tự làm.*

Bài 8: *Học sinh tự làm.*

Bài 9:

a. Khi nhân hai vế của bất phương trình $2 - x < 0$ với -1, ta được: $x - 2 > 0$ đó chính là bất phương trình còn lại.

Vậy, hai bất phương trình là tương đương.

b. Ta luôn có $|a| = |-a|$ nên bất phương trình: $|x - 2| < 0 \Leftrightarrow |-(x - 2)| < 0 \Leftrightarrow |2 - x| < 0$ đó chính là bất phương trình còn lại.

Vậy, hai bất phương trình là tương đương.

c. Hai bất phương trình đã cho là không tương đương, bởi:

- $x = 0$ là nghiệm của bất phương trình $x < 1$.
- $x = 0$ không thể là nghiệm của bất phương trình $x + \frac{2}{x} < 1 + \frac{2}{x}$.

d. Hai bất phương trình đã cho là không tương đương, bởi:

- $x = -2$ là nghiệm của bất phương trình $x < 1$.
- $x = -2$ không thể là nghiệm của bất phương trình $x^2 < 1$.

e. Hai bất phương trình đã cho là không tương đương, bởi:

- $x = -4$ là nghiệm của bất phương trình $x^2 > 9$.
- $x = -4$ không thể là nghiệm của bất phương trình $x > 3$.

CHỦ ĐỀ 3

BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. HAI QUY TẮC BIẾN ĐỔI BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Quy tắc chuyển vế: Khi chuyển một hạng tử của bất phương trình từ vế này sang vế kia ta phải đổi dấu hạng tử đó.

Quy tắc nhân với một số: Khi nhân (hoặc chia) cả hai vế của bất phương trình với cùng một số khác 0, ta phải:

1. Giữ nguyên chiều của bất phương trình nếu số đó dương.
2. Đổi chiều của bất phương trình nếu số đó âm.

2. ĐỊNH NGHĨA BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Định nghĩa: *Bất phương trình dạng:*

$$ax + b > 0, \quad ax + b < 0, \quad ax + b \le 0, \quad ax + b \ge 0,$$

với a *và* b *là hai số đã cho và* $a \neq 0$, *được gọi là bất phương trình bậc nhất một ẩn.*

Bất phương trình bậc nhất một ẩn dạng: $ax + b > 0$, $a \neq 0$ được giải như sau: $ax + b > 0 \Leftrightarrow ax > -b$.

- Với $a > 0$, ta được $x > -\dfrac{b}{a}$.
- Với $a < 0$, ta được $x < -\dfrac{b}{a}$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: ĐIỀU KIỆN ĐỂ MỘT BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Ví dụ 1: *Tìm điều kiện của tham số* m *để bất phương trình sau là bất phương trình bậc nhất một ẩn*:

a. $(m^2 - 2m)x^2 + mx + 3 > 0$.   b. $mx + (m - 1)y + 4 \le 0$.

✍ *Giải*

a. Để bất phương trình: $(m^2 - 2m)x^2 + mx + 3 > 0$ là bất phương trình bậc nhất một ẩn khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m^2 - 2m = 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(m-2) = 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \text{ hoặc } m = 2 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

Vậy, với m = 2 bất phương trình đã cho là một bất phương trình bậc nhất một ẩn x.

b. Để bất phương trình: $mx + (m - 1)y + 4 \le 0$ là bất phương trình bậc nhất một ẩn có hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nó là bất phương trình bậc nhất một ẩn x khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Trường hợp 2: Nó là bất phương trình bậc nhất một ẩn y khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m = 0 \\ m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$$

Kết luận:

- Với m = 1, bất phương trình đã cho là một bất phương trình bậc nhất một ẩn x.
- Với m = 0, bất phương trình đã cho là một bất phương trình bậc nhất một ẩn y.

Vấn đề 2: GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Ví dụ 1: (Bài 19/tr 47 – Sgk): *Giải các phương trình (theo quy tắc chuyển vế)*:

a. $x - 5 > 3$. b. $x - 2x < -2x + 4$.

c. $-3x > -4x + 2$. d. $8x + 2 < 7x - 1$.

Giải

a. Ta có: $x - 5 > 3 \Leftrightarrow x > 3 + 5 \Leftrightarrow x > 8$.

b. Ta có: $x - 2x < -2x + 4 \Leftrightarrow x - 2x + 2x < 4 \Leftrightarrow x < 4$.

c. Ta có: $-3x > -4x + 2 \Leftrightarrow -3x + 4x > 2 \Leftrightarrow x > 2$.

d. Ta có: $8x + 2 < 7x - 1 \Leftrightarrow 8x - 7x < -1 - 2 \Leftrightarrow x < -3$.

Ví dụ 2: (Bài 20/tr 47 – Sgk): *Giải các phương trình (theo quy tắc nhân)*:

a. $0,3x > 0,6$. b. $-4x < 12$. c. $-x > 4$. d. $1,5x > -9$.

Giải

a. Ta có: $0,3x > 0,6 \Leftrightarrow 0,3x.\dfrac{1}{0,3} > 0,6.\dfrac{1}{0,3} \Leftrightarrow x > \dfrac{0,6}{0,3} \Leftrightarrow x > 2$.

b. Ta có: $-4x < 12 \Leftrightarrow (-4x).\left(-\dfrac{1}{4}\right) > 12.\left(-\dfrac{1}{4}\right) \Leftrightarrow x > -3$.

c. Ta có: $-x > 4 \Leftrightarrow (-x)(-1) < 4.(-1) \Leftrightarrow x < -4$.

d. Ta có: $1,5x > -9 \Leftrightarrow 1,5x.\dfrac{1}{1,5} > (-9).\dfrac{1}{1,5} \Leftrightarrow x > -6$.

Ví dụ 3: *Sử dụng hai quy tắc biến đổi bất phương trình để giải các bất phương trình sau*:

a. $3x > x + 8$. b. $x^2 + 2x > x^2 - 4$.

Giải

a. Sử dụng lần lượt các quy tắc, biến đổi bất phương trình về dạng:

$3x - x > 8 \Leftrightarrow 2x > 8 \Leftrightarrow x > 4$.

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x > 4$.

b. Sử dụng lần lượt các quy tắc, biến đổi bất phương trình về dạng:

$x^2 + 2x > x^2 - 4 \Leftrightarrow x^2 + 2x - x^2 > -4 \Leftrightarrow 2x > -4 \Leftrightarrow x > -2$.

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x > -2$.

☞ *Nhận xét*:

1. Trong lời giải các bất phương trình trên, chúng ta đã thừa nhận rằng kết quả " *Từ một bất phương trình, dùng quy tắc chuyển vế hay quy tắc nhân, ta luôn nhận được một bất phương trình mới tương đương với bất phương trình đã cho* ".
2. Cũng chính nhờ những quy tắc này mà việc chứng minh một bất đẳng thức sẽ đơn giản hơn rất nhiều – *Điều này chúng ta sẽ gặp lại trong chủ đề chuyên sâu về bất đẳng thức ở cuối chương.*

Ví dụ 4: (Bài 22/tr 47 – Sgk): *Giải các bất phương trình sau và hãy biểu diễn tập nghiệm của nó trên trục số:*

a. $1,2x < -6$. b. $3x + 4 > 2x + 3$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

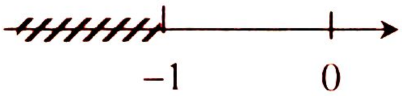
$$1,2x < -6 \Leftrightarrow x < -\frac{6}{1,2} \Leftrightarrow x < -5$$



b. Ta có:

$3x + 4 > 2x + 3 \Leftrightarrow 3x - 2x > 3 - 4$

$\Leftrightarrow x > -1$.



Ví dụ 5: (Bài 32/tr 48 – Sgk): *Giải các bất phương trình*:

a. $8x + 3(x + 11) > 5x - (2x - 6)$. b. $2x(6x - 1) > (3x - 2)(4x + 3)$.

✍ *Giải*

a. Ta có: $8x + 3(x + 11) > 5x - (2x - 6)$

$$\Leftrightarrow 11x + 11 > 3x + 6 \Leftrightarrow 8x > -5 \Leftrightarrow x > -\frac{5}{8}.$$

b. Ta có: $2x(6x - 1) > (3x - 2)(4x + 3)$

$$\Leftrightarrow 12x^2 - 2x > 12x^2 + x - 6 \Leftrightarrow -3x > -6 \Leftrightarrow x < 2.$$

Ví dụ 6: *Giải bất phương trình*: $(m^2 + 1)x - m^4 < -1$, với m là tham số.

✍ *Giải*

Biến đổi tương đương bất phương trình về dạng: $(m^2 + 1)x < m^4 - 1$. (*)

Vì $m^2 + 1$ luôn dương với mọi m nên khi chia cả hai vế của bất phương trình (*) cho $m^2 + 1$ thì dấu bất phương trình không thay đổi, cụ thể ta được:

$$x < \frac{m^4 - 1}{m^2 + 1} = \frac{(m^2 - 1)(m^2 + 1)}{m^2 + 1} = m^2 - 1 \Leftrightarrow x < m^2 - 1.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x < m^2 - 1$.

Ví dụ 7: *Cho bất phương trình*: $(m^2 - 2m)x + 1 < m$.

Giải bất phương trình trong mỗi trường hợp sau:

a. m = 1. b. m = 2. c. m = 3. d. m = 0.

✍ *Giải*

a. Với m = 1, bất phương trình có dạng:

$(1^2 - 2.1)x + 1 < 1 \Leftrightarrow -x < 0 \Leftrightarrow x > 0.$

Vậy, với m = 1 bất phương trình có nghiệm x > 0.

b. Với m = 2, bất phương trình có dạng:

$(2^2 - 2.2)x + 1 < 2 \Leftrightarrow 0x < 1$, luôn đúng.

Vậy, với m = 2 bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

c. Với m = 3, bất phương trình có dạng:

$$(3^2 - 2.3)x + 1 < 3 \Leftrightarrow 3x < 2 \Leftrightarrow x < \frac{2}{3}.$$

Vậy, với m = 3 bất phương trình có nghiệm $x < \frac{2}{3}$.

d. Với m = 0, bất phương trình có dạng: $0.x + 1 < 0 \Leftrightarrow 1 < 0$, mâu thuẫn.

Vậy, với m = 0 bất phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 8: (Bài 20/tr 47 – Sgk): ***Đố***: *Kiểm tra xem giá trị* x = –2 *có là nghiệm của các bất phương trình sau không ?*

a. $x + 2x^2 - 3x^3 + 4x^4 - 5 < 2x^2 - 3x^3 + 4x^4 - 6$

b. $(-0{,}001)x > 0{,}003$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$x + 2x^2 - 3x^3 + 4x^4 - 5 < 2x^2 - 3x^3 + 4x^4 - 6 \Leftrightarrow x - 5 < -6 \Leftrightarrow x < -1.$$

Vậy x = –2 là nghiệm của bất phương trình.

b. Ta có: $(-0{,}001)x > 0{,}003 \Leftrightarrow x < -3$

Vậy x = –2 không phải là nghiệm của bất phương trình.

Ví dụ 9: (Bài 34/tr 49 – Sgk): ***Đố***: *Tìm sai lầm trong các lời giải sau*:

a. *Giải bất phương trình* $-2x > 23$.

Ta có: $-2x > 23 \Leftrightarrow x > 23 + 2 \Leftrightarrow x > 25$.

b. *Giải bất phương trình* $-\frac{3}{7}x > 12$.

Ta có: $-\frac{3}{7}x > 12 \Leftrightarrow \left(-\frac{7}{3}\right).\left(-\frac{3}{7}x\right) > 12.\left(-\frac{7}{3}\right) \Leftrightarrow x > -28$

✍ *Giải*

a. Phép tương đương: $-2x > 23 \Leftrightarrow x > 23 + 2$ là sai.

Ta sửa lại như sau: $-2x > 23 \Leftrightarrow -2x.\left(-\frac{1}{2}\right) < 23.\left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x < -\frac{23}{2}$.

b. Phép tương đương $-\frac{3}{7}x > 12 \Leftrightarrow \left(-\frac{7}{3}\right).\left(-\frac{3}{7}x\right) > 12.\left(-\frac{7}{3}\right)$ là sai.

Ta sửa lại như sau: $-\frac{3}{7}x > 12 \Leftrightarrow \left(-\frac{7}{3}\right).\left(-\frac{3}{7}x\right) < 12.\left(-\frac{7}{3}\right) \Leftrightarrow x < -28.$

Ví dụ 10: (Bài 29/tr 48 – Sgk): *Tìm* x *sao cho*:

a. *Giá trị của biểu thức* 2x – 5 *không âm.*

b. *Giá trị của biểu thức* –3x *không lớn hơn giá trị của biểu thức* –7x + 5.

Giải

a. Theo đề bài, ta có: $2x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{2}$.

b. Theo đề bài, ta có: $-3x \leq -7x + 5 \Leftrightarrow 4x \leq 5 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{4}$

Ví dụ 11: *Tìm* x *để* A < 0, *biết*: $A = 1 - \frac{2x+3}{2}$.

Giải

Trước tiên ta đi rút gọn biểu thức A: $A = 1 - \frac{2x+3}{2} = \frac{2-2x-3}{2} = \frac{-2x-1}{2}$.

Để A < 0, ta phải có: $\frac{-2x-1}{2} < 0 \Leftrightarrow -2x - 1 < 0 \Leftrightarrow -2x < 1 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$.

Vậy, với $x > -\frac{1}{2}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 12: *Một người có số tiền không quá 70 000 đồng gồm 15 tờ giấy bạc với hai loại mệnh giá 2000 đồng và loại 5000 đồng. Hỏi người đó có bao nhiêu tờ giấy bạc loại 5000 đồng?*

Giải

Gọi x là số tờ giấy bạc loại 5000 đồng (0 < x < 15, đơn vị: tờ).
Do đó, số giấy bạc loại 2000 đồng là: 15 – x (tờ).
Theo đề bài, ta có bất phương trình:

$5000.x + (15 - x).2000 \leq 70000 \Leftrightarrow 3000x \leq 40000 \Leftrightarrow x \leq \frac{40}{3} \Leftrightarrow x \leq 13,(3).$

Vì x là nguyên dương, nên x nhận được các giá trị từ 1 đến 13.
Vậy, số tờ giấy bạc mệnh giá 5000 đồng là một trong các số nguyên từ 1 đến 13.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Hãy nhân hai vế của mỗi bất phương trình sau với một số thích hợp để đưa bất phương trình về dạng x < a hoặc x > a:

a. $2x > -4$. b. $\frac{1}{3}x < 3$. c. $8x > 32$. d. $27x > -3$.

Bài 2: Dùng các phép biến đổi tương đương để đưa các bất phương trình sau về dạng $x < a$ hoặc $x > a$:

a. $3x + 2 < 8$. b. $5 - 4x < -7$.

c. $(2m^2 + 1)x - 4m^4 < -1$, với m là tham số.

Bài 3: So sánh số a với số b, biết:

a. $x > 6 \Leftrightarrow (a - b)x < 6(a - b)$. b. $x > 2 \Leftrightarrow (a - b)x > -2(b - a)$.

Bài 4: Tìm điều kiện của tham số m để bất phương trình sau là bất phương trình bậc nhất một ẩn:

a. $m(m^2 - 1)x^2 + mx + 6 > 0$. b. $mx + (m + 2)y + 8 < 0$.

Bài 5: Giải các bất phương trình:

a. $2x - 1 > 3$. b. $8 - 4x < 6$.

Bài 6: Tìm x biết:

a. $2x - 1 > 0$. c. $x^2 - 5x < x^2 + 1$.

b. $8 - 4x < 0$. d. $2x + 1 > 5x - 2$.

Bài 7: Tìm x để biểu thức sau có giá trị dương:

a. $\frac{1}{2}x - 3$. b. $5x^2 + 11$. c. $\frac{3 - 2x}{x^2 + 1}$. d. $\frac{2x^2 - 4x}{x - 2}$.

Bài 8: Cho bất phương trình: $(m^2 - 4m + 3)x + 1 \geq m$.

Giải bất phương trình trong mỗi trường hợp sau:

a. $m = 0$. b. $m = 1$. c. $m = 3$.

Bài 9: Với giá trị nào của m thì phương trình ẩn x:

a. $x - 3 = m + 4$ có nghiệm lớn hơn 2.

b. $2x - 3 = 2m + 8$ có nghiệm dương.

c. $3x - 1 = 6m + 8$ có nghiệm không nhỏ hơn 6.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1: *Học sinh tự làm.*

Bài 2: a. $x < 3$. b. $x > 3$.

c. Ta biến đổi: $(2m^2 + 1)x - 4m^4 < -1 \Leftrightarrow (2m^2 + 1)x < 4m^4 - 1$

$$\Leftrightarrow (2m^2 + 1)x < (2m^2 + 1)(2m^2 - 1). \quad (1)$$

Vì $2m^2 + 1 > 0$ với mọi m nên (1) $\Leftrightarrow x < 2m^2 - 1$.

Vậy, bất phương trình được chuyển thành $x < 2m^2 - 1$.

Bài 3: a. $a < b$. b. $a > b$.

Bài 4:

a. Bất phương trình là bất phương trình bậc nhất một ẩn khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m(m^2 - 1) = 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \text{ hoặc } m = \pm 1 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm 1.$$

Vậy, với $m = m(m^2 - 1)x^2 + mx + 6 > 0$ bất phương trình đã cho là một bất phương trình bậc nhất một ẩn x.

b. Bất phương trình là bất phương trình bậc nhất một ẩn có hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nó là bất phương trình bậc nhất một ẩn x khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ m + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m = -2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2.$$

Trường hợp 2: Nó là bất phương trình bậc nhất một ẩn y khi và chỉ khi:

$$\begin{matrix} m = 0 \\ m + 2 \neq 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$$

Kết luận:

- Với m = – 2, bất phương trình đã cho là một bất phương trình bậc nhất một ẩn x.
- Với m = 0, bất phương trình đã cho là một bất phương trình bậc nhất một ẩn y.

Bài 5: a. $x > 2$. b. $x > \frac{1}{2}$.

Bài 6: a. $x > \frac{1}{2}$. b. $x > 2$. c. $x > -\frac{1}{5}$. d. $x < 1$.

Bài 7: a. $x > 6$. b. Mọi x. c. $x < \frac{3}{2}$.

d. Trước tiên ta cần có $x \neq 2$.

Khi đó, điều kiện là: $0 < \frac{2x^2 - 4x}{x - 2} = \frac{2x(x-2)}{x-2} = 2x \Leftrightarrow x > 0$.

Vậy điều kiện để biểu thức dương là $0 < x \neq 2$.

Bài 8: Viết lại bất phương trình: $(m^2 - 4m + 3)x \geq m - 1$.

a. Với m = 0, bất phương trình có dạng $3x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3}$.

Vậy, với m = 0 bất phương trình có nghiệm $x \geq -\frac{1}{3}$.

b. Với m = 1, bất phương trình có dạng $0x \geq 0$, luôn đúng.
Vậy, với m = 1 bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

c. Với m = 3, bất phương trình có dạng: $0x \geq 2$, mâu thuẫn.
Vậy, với m = 3 bất phương trình vô nghiệm.

Bài 9: Với giá trị nào của m thì phương trình ẩn x:

a. Phương trình có nghiệm $x = m + 7$
Khi đó, để nghiệm của phương trình lớn hơn 2 điều kiện là: $m + 7 > 2 \Leftrightarrow m > -5$.
Vậy, với $m > -5$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. Phương trình có nghiệm $x = m + \frac{11}{2}$.

Khi đó, để nghiệm của phương trình dương điều kiện là: $m + \frac{11}{2} > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{11}{2}$.

Vậy, với $m > -\frac{11}{2}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

c. Phương trình có nghiệm $x = 2m + 3$.
Khi đó, để nghiệm của phương trình không nhỏ hơn 6 điều kiện là:

$$2m + 3 \geq 6 \Leftrightarrow m \geq \frac{3}{2}.$$

Vậy, với $m \geq \frac{3}{2}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

CHỦ ĐỀ 4

BẤT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯA VỀ DẠNG BẬC NHẤT

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Bằng việc sử dụng phép toán bỏ dấu ngoặc hay quy đồng mẫu ... để biến đổi bất phương trình ban đầu về dạng:

$$ax + b \lessgtr 0 \text{ hoặc } ax \lessgtr -b.$$

Bước 2: Giải bất phương trình nhận được, từ đó kết luận.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: *Giải bất phương trình*: $3(2x - 1) - (5x + 3) < -x$.

✍ *Giải*

Biến đổi phương trình về dạng:

$$6x - 3 - 5x - 3 < -x \Leftrightarrow 6x - 5x + x < 3 + 3 \Leftrightarrow 2x < 6 \Leftrightarrow x < 3.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x < 3$.

Ví dụ 2: *Giải bất phương trình*: $3 - \frac{x-3}{12} < x - \frac{x-3}{8}$.

✍ *Giải*

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách giải sau:

Cách 1: Nhân hai vế của bất phương trình với 24, được:

$$72 - 2(x - 3) < 24x - 3(x - 3) \Leftrightarrow 72 - 2x + 6 < 24x - 3x + 9$$

$$\Leftrightarrow -2x - 24x + 3x < 9 - 72 - 6 \Leftrightarrow -23x < -69 \Leftrightarrow x > 3.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x > 3$.

Cách 2: Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\frac{x-3}{8} - x + 3 - \frac{x-3}{12} < 0 \Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{1}{8} - 1 - \frac{1}{12}\right) < 0$$

$$\Leftrightarrow x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 3.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x > 3$.

☛ ***Nhận xét***: Trong lời giải của cách 2, ta không máy móc quy đồng mẫu thức hai vế rồi khử mẫu thức, bởi xuất phát từ nhận xét về nhân tử chung $x - 3$, điều này sẽ giúp giảm đáng kể độ phức tạp trong lời giải.

Ví dụ 3: *Cho biểu thức*: $A = \frac{x+1}{6} - \frac{x-2}{2}$.

Tìm các giá trị của x sao cho giá trị của A *lớn hơn* -1 *nhưng nhỏ hơn* 1. *Biểu diễn trên trục số các giá trị tìm được của* x.

✍ *Giải*

Trước tiên ta đi rút gọn biểu thức A:

$$A = \frac{x+1}{6} - \frac{x-2}{2} = \frac{x+1-3(x-2)}{6} = \frac{x+1-3x+6}{6} = \frac{7-2x}{6}.$$

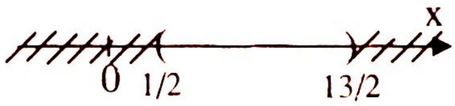
- Để A > – 1 điều kiện là:

$$\frac{7-2x}{6} > -1 \Leftrightarrow 7 - 2x > -6 \Leftrightarrow -2x > -6 - 7 \Leftrightarrow x < \frac{13}{2}.$$

- Để A < 1 điều kiện là:

$$\frac{7-2x}{6} < 1 \Leftrightarrow 7 - 2x < 6 \Leftrightarrow -2x < 6 - 7 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}.$$

Vậy, để có được $-1 < A < 1$ điều kiện là $\frac{1}{2} < x < \frac{13}{2}$ và ta có biểu diễn:



Cách biểu diễn trên trục được thực hiện như sau:

1. Xác định vị trí của các điểm $\frac{1}{2}$ và $\frac{13}{2}$.
2. Giữ nguyên đoạn thẳng từ điểm $\frac{1}{2}$ đến điểm $\frac{13}{2}$.
3. Gạch chéo phần còn lại, gạch cả điểm $\frac{1}{2}$ và $\frac{13}{2}$.

Ví dụ 4: *Trong cuộc thi bắn súng, mỗi hạ thủ được bắn 10 phát. Mỗi lần trúng đích được 5 điểm, mỗi lần trượt bị trừ 1 điểm. Xạ thủ nào đạt được 30 điểm trở lên thì được thưởng. Hỏi xạ thủ phải bắn trúng đích bao nhiêu lần thì được thưởng ?*

✍ *Giải*

Gọi số lần bắn trúng đích là x, điều kiện $x \in N, 0 \le x \le 10$. (*)

Theo giả thiết:

- Mỗi hạ thủ được bắn 10 phát nên số lần bắn trượt là 10 – x, khi đó tổng số điểm đạt được là 5x – (10 – x).
- Muốn được thưởng, tổng số điểm phải đạt từ 30 điểm trở lên, do đó:

$$5x - (10 - x) \ge 30 \Leftrightarrow 5x - 10 + x \ge 30 \Leftrightarrow 6x \ge 40 \Leftrightarrow x \ge \frac{20}{3}.$$

Kết hợp với điều kiện (*), ta được:

$$x \in N,\ \frac{20}{3} \le x \le 10 \Rightarrow x = 7, x = 8, x = 9, x = 10.$$

Vậy, để nhận được thưởng thì số lần bắn trúng đích phải là 7 lần, hoặc 8 lần, hoặc 9 lần, hoặc 10 lần.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Giải các bất phương trình sau và hãy biểu diễn tập nghiệm của nó trên trục số:

a. $3x - 5 > 2x$.

b. $3x < 2x + 3$.

c. $2 + 2x < 2(x + 2)$.

d. $2x - 3 > 5 - (3 - 2x)$.

Bài 2: Giải các bất phương trình sau và hãy biểu diễn tập nghiệm của nó trên trục số:

a. $5x - 2 < 2(x - 1) - (2 - 3x)$.

b. $(x - 3)(x + 3) < x(x - 6)$.

c. $(x - 2)^2 > x(x + 3)$.

d. $(x + 2)^2 \geq 2x(x + 2) + 4$.

Bài 3: Giải các bất phương trình:

a. $x^2 + 2(x - 3) - 1 > x(x + 5) + 5$.

b. $(x - 1)(x + 5) < (x - 3)(x + 5)$.

c. $(x + 2)(x + 4) < (x - 2)(x + 8) + 26$.

Bài 4: Giải các bất phương trình sau và hãy biểu diễn tập nghiệm của nó trên trục số:

a. $\dfrac{x+2}{3} - \dfrac{x-2}{4} < 1$.

b. $\dfrac{2x-1}{4} + 2 < \dfrac{5x-1}{8}$.

c. $\dfrac{2x+1}{6} - \dfrac{x-2}{2} < 3$.

d. $\dfrac{2x-7}{3} < \dfrac{4-3x}{9}$.

Bài 5: Giải các bất phương trình:

a. $2x - \dfrac{x+1}{3} + \dfrac{3x+2}{6} > \dfrac{x}{2} + 3$.

b. $\dfrac{x+4}{5} - x + 3 < \dfrac{x+2}{3} - \dfrac{x-1}{2}$.

Bài 6: Giải các bất phương trình:

a. $\dfrac{5x-1}{5} - \dfrac{3x+1}{2} > 0$.

b. $\dfrac{2x-1}{4} - \dfrac{3x+4}{6} < 0$.

c. $\dfrac{1-x}{3} + \dfrac{2x-3}{12} < 0$.

Bài 7: Tìm các số tự nhiên n thoả mãn bất phương trình:

a. $3(4n - 5) < 2n + 27$.

b. $(n + 2)^2 - 40 < (n - 3)(n + 3)$.

Bài 8: Tìm các giá trị của x thoả mãn cả hai bất phương trình sau và biểu diễn trên trục số:

a. $6x - 3 < 4x - 1$ và $5x + 1 > 3x - 3$.

b. $3x - 1 > x - 2$ và $4x - 1 > 2x - 3$.

Bài 9: Tìm giá trị của x để biểu thức sau có giá trị dương:

a. $A = \dfrac{5-2x}{x^2+4}$.

b. $B = \dfrac{2x-5}{6} + \dfrac{5x-2}{3}$.

c. $C = \dfrac{x+27}{5} - \dfrac{3x-7}{4}$.

Bài 10: Cho biểu thức: $A = \left(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{x+5}{1-x^2}\right) : \dfrac{2x+1}{x^2-1}$.

a. Rút gọn biểu thức A.

b. Tìm các giá trị của x để $A > 0$.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1:

a. $x > 5$. b. $x < 3$. c. Mọi x. d. $\varnothing$.

Việc biểu diễn tập nghiệm trên trục số dành cho các em học sinh.

Bài 2: Giải các bất phương trình sau và hãy biểu diễn tập nghiệm của nó trên trục số:

a. $\varnothing$. b. $x < \dfrac{3}{2}$. c. $x < \dfrac{4}{7}$. d. $x = 0$.

Việc biểu diễn tập nghiệm trên trục số dành cho các em học sinh.

Bài 3:

a. Biến đổi bất phương trình về dạng: $x^2 + 2x - 6 - 1 > x^2 + 5x + 5 \Leftrightarrow 3x < -12 \Leftrightarrow x < -4$.
Vậy, bất phương trình có nghiệm $x < -4$.

b. Biến đổi bất phương trình về dạng: $(x + 5)(x - 1 - x + 3) < 0 \Leftrightarrow x + 5 < 0 \Leftrightarrow x < -5$.
Vậy, bất phương trình có nghiệm $x < -5$.

c. Mọi x.

Bài 4: Giải các bất phương trình sau và hãy biểu diễn tập nghiệm của nó trên trục số:

a. $x < -2$. b. $x > 15$. c. $x > -11$. d. $x < \frac{25}{9}$.

Việc biểu diễn tập nghiệm trên trục số dành cho các em học sinh.

Bài 5:

a. $x > \frac{9}{5}$. b. $x > \frac{79}{19}$.

Bài 6:

a. $x < -\frac{7}{5}$. b. Mọi x. c. $x > \frac{1}{2}$.

Bài 7:

a. Biến đổi biểu thức về dạng: $10n < 42 \Leftrightarrow n < 4{,}2$
Suy ra, ta chọn được $n = 0, n = 1, n = 2, n = 3, n = 4$.

b. Biến đổi biểu thức về dạng: $4n < 25 \Leftrightarrow n < 6{,}25$
Suy ra, ta chọn được $n = 0, n = 1, n = 2, n = 3, n = 4, n = 5, n = 6$.

Bài 8: Việc biểu diễn tập nghiệm trên trục số dành cho các em học sinh.

a. Ta lần lượt giải các bất phương trình:

$6x - 3 < 4x - 1 \Leftrightarrow x < 1$; $5x + 1 > 3x - 3 \Leftrightarrow x > -2$.

Vậy, với $-2 < x < 1$ thoả mãn cả hai bất phương trình.

b. Ta lần lượt giải các bất phương trình:

$$3x - 1 > x - 2 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2};\ 4x - 1 > 2x - 3 \Leftrightarrow x > -1.$$

Vậy, với $x > -\frac{1}{2}$ thoả mãn cả hai bất phương trình.

Bài 9: Tìm giá trị của x để biểu thức sau có giá trị dương:

a. $x < \frac{5}{2}$. b. $x > \frac{3}{4}$. c. $x < 13$.

Bài 10: Để A có nghĩa điều kiện là $x \neq \pm 1$.

a. Ta có: $A = \frac{x - 1 - 2(x + 1) + x + 5}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{2x + 1} = \frac{2}{2x + 1}$.

b. Để $A > 0$, điều kiện là: $\frac{2}{2x + 1} > 0 \Leftrightarrow 2x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$.

Vậy, để $A > 0$ điều kiện là $-\frac{1}{2} < x \neq 1$.

CHỦ ĐỀ 5

PHƯƠNG TRÌNH CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. NHẮC LẠI VỀ GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Với số a, ta có: $|a| = \begin{cases} a & \text{nếu } a \geq 0 \\ -a & \text{nếu } a < 0 \end{cases}$.

Tương tự như vậy, với đa thức ta cũng có: $|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{nếu } f(x) < 0 \end{cases}$.

2. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Trong phạm vi kiến thức lớp 8 chúng ta sẽ chỉ quan tâm tới ba dạng phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối, bao gồm:

Dạng 1: Phương trình: $|f(x)| = k$, với k là hằng số không âm.

Dạng 2: Phương trình: $|f(x)| = |g(x)|$.

Dạng 3: Phương trình: $|f(x)| = g(x)$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

<u>Vấn đề 1:</u> PHÁ DẤU TRỊ TUYỆT ĐỐI

<u>Ví dụ 1:</u> (Bài 35/tr 51 – Sgk): *Bỏ dấu giá trị tuyệt đối và rút gọn các biểu thức:*

a. $A = 3x + 2 + |5x|$ *trong hai trường hợp* $x \geq 0$ *và* $x < 0$.

b. $B = |-4x| - 2x + 12$ *trong hai trường hợp* $x \geq 0$ *và* $x < 0$.

c. $C = |x - 4| - 2x + 12$ *khi* $x > 5$.

d. $D = 3x + 2 + |x + 5|$.

Giải

a. Ta có: $|5x| = \left[\begin{array}{l} 5x \text{ khi } x \geq 0 \\ -5x \text{ khi } x < 0 \end{array}\right.$.

Do đó: $A = \left[\begin{array}{l} 3x + 2 + 5x \text{ khi } x \geq 0 \\ 3x + 2 - 5x \text{ khi } x < 0 \end{array}\right. = \left[\begin{array}{l} 8x + 2 \text{ khi } x \geq 0 \\ -2x + 2 \text{ khi } x < 0 \end{array}\right.$.

b. Ta có: $|-4x| = \left[\begin{array}{l} -4x \text{ khi } x \geq 0 \\ 4x \text{ khi } x < 0 \end{array}\right.$.

Do đó: $B = \left[\begin{array}{l} -4x - 2x + 12 \text{ khi } x \geq 0 \\ 4x - 2x + 12 \text{ khi } x < 0 \end{array}\right. = \left[\begin{array}{l} -6x + 12 \text{ khi } x \geq 0 \\ 2x + 12 \text{ khi } x < 0 \end{array}\right.$.

c. Ta có: $|x - 4| = x - 4$ khi $x > 5$.

Do đó: $C = x - 4 - 2x + 12 = -x + 8$.

d. Ta có $|x + 5| = \left[\begin{array}{l} x + 5 \text{ khi } x \geq 5 \\ -x - 5 \text{ khi } x < 5 \end{array}\right.$

Do đó $D = \left[\begin{array}{l} 3x + 2 + x + 5 \text{ khi } x \geq 5 \\ 3x + 2 - x - 5 \text{ khi } x < 5 \end{array}\right. = \left[\begin{array}{l} 4x + 7 \text{ khi } x \geq 5 \\ 2x - 3 \text{ khi } x < 5 \end{array}\right.$

Ví dụ 2: *Bỏ dấu giá trị tuyệt đối và rút gọn các biểu thức:*

a. $A = |x - 2| + 3x - 2$ *khi* $x > 2$.

b. $B = |x - 3| + |3 - 2x| + x + 8$ *khi* $x > 3$.

✍ *Giải*

a. Với giả thiết $x > 2$, ta suy ra: $x - 2 > 0 \Rightarrow |x - 2| = x - 2$.

Do đó A được viết lại: $A = x - 2 + 3x - 2 = 4x - 4$.

b. Với giả thiết $x > 3$, ta suy ra:

$x - 3 > 0 \Rightarrow |x - 3| = x - 3$.

$3 - 2x < 0 \Rightarrow |3 - 2x| = -(3 - 2x)$.

Do đó B được viết lại:

$B = x - 3 - (3 - 2x) + x + 8 = x - 3 - 3 + 2x + x + 8 = 3x + 2$.

Ví dụ 3: *Bỏ dấu giá trị tuyệt đối và rút gọn biểu thức:*

$$C = |x - 1| + 2|x + 2| + 3.$$

✍ *Giải*

Nhận xét rằng:

$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

do đó, để bỏ được dấu giá trị tuyệt đối của C ta cần xét các trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $x < -2$, ta được: $C = -(x - 1) - 2(x + 2) + 3 = -3x$.

Trường hợp 2: Nếu $-2 \leq x \leq 1$, ta được: $C = -(x - 1) + 2(x + 2) + 3 = x + 8$.

Trường hợp 3: Nếu $x > 1$, ta được: $C = (x - 1) + 2(x + 2) + 3 = 3x + 6$.

Vấn đề 2: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH DẠNG

$|f(x)| = k$, với k là hằng số không âm.

Phương pháp

Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đặt điều kiện để f(x) xác định (nếu cần).

Bước 2: Khi đó: $|f(x)| = k \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = k \\ f(x) = -k \end{array}\right. \Rightarrow$ nghiệm x.

Bước 3 Kiểm tra điều kiện, từ đó đưa ra kết luận nghiệm cho phương trình.

Ví dụ 1: *Giải phương trình*: $|2x - 3| = 1$.

✍ *Giải*

Biến đổi tương đương phương trình:

$$|2x - 3| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 3 = 1 \\ 2x - 3 = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = 1 + 3 \\ 2x = -1 + 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 1 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 2$ và $x = 1$.

Ví dụ 2: *Giải phương trình*: $\left|\dfrac{x + 2}{x - 2}\right| = 1$.

✍ *Giải*

Điều kiện xác định của phương trình là $x \neq 2$.

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1: Biến đổi tương đương phương trình:

$$\left|\frac{x + 2}{x - 2}\right| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x + 2}{x - 2} = 1 \\ \dfrac{x + 2}{x - 2} = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 2 = x - 2 \\ x + 2 = -(x - 2) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 0$.

Cách 2: Biến đổi tương đương phương trình:

$$\left|\frac{x + 2}{x - 2}\right| = 1 \Leftrightarrow |x + 2| = |x - 2| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 2 = x - 2 \\ x + 2 = -(x - 2) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 0$.

Vấn đề 3: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH DẠNG

$$|f(x)| = |g(x)|.$$

Phương pháp

Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đặt điều kiện để $f(x)$ và $g(x)$ xác định (nếu cần).

Bước 2: Khi đó: $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right. \Rightarrow$ nghiệm x.

Bước 3: Kiểm tra điều kiện, từ đó đưa ra kết luận nghiệm cho phương trình.

Ví dụ 1: *Giải các phương trình sau*:

a. $|2x + 3| = |x - 3|$.

b. $\left|\dfrac{x^2 - x + 2}{x + 1}\right| - |x| = 0$.

✍ *Giải*

a. Biến đổi tương đương phương trình:

$$|2x+3| = |x-3| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+3 = x-3 \\ 2x+3 = -(x-3) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-x = -3-3 \\ 2x+x = 3-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -6 \\ x = 0 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm x = – 6 và x = 0.

b. Điều kiện xác định của phương trình là $x \neq 0$.

Biến đổi tương đương phương trình:

$$\left|\frac{x^2-x+2}{x+1}\right| = |x| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2-x+2}{x+1} = x \\ \dfrac{x^2-x+2}{x+1} = -x \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x+2 = x(x+1) \\ x^2-x+2 = -x(x+1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = 2 \\ 2x^2 = -2, \text{ vô nghiệm} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy, phương trình có nghiệm x = 1.

Ví dụ 2: *Giải phương trình*: $|2x - 3m| = |x + 6|$, với m là tham số.

✍ *Giải*

Biến đổi tương đương phương trình:

$$|2x-3m| = |x+6| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-3m = x+6 \\ 2x-3m = -(x+6) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-x = 6+3m \\ 2x+x = -6+3m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6+3m \\ x = m-2 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm x = 6 + 3m và x = m – 2.

Vấn đề 4: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH DẠNG

$$|f(x)| = g(x).$$

Phương pháp

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: (*Phá dấu trị tuyệt đối*) Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đặt điều kiện để f(x) và g(x) xác định (nếu cần).

Bước 2: Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $f(x) \geq 0$. (1)

Phương trình có dạng:

$f(x) = g(x) \Rightarrow$ nghiệm x và kiểm tra điều kiện (1).

Trường hợp 2: Nếu $f(x) < 0$. (2)

Phương trình có dạng: $-f(x) = g(x)$

$\Rightarrow$ nghiệm x và kiểm tra điều kiện (2).

Bước 3: Kết luận nghiệm cho phương trình.

Cách 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đặt điều kiện để f(x) và g(x) xác định (nếu cần) và $g(x) \ge 0$.

Bước 2: Khi đó: $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right. \Rightarrow$ nghiệm x.

Bước 3: Kiểm tra điều kiện, từ đó đưa ra kết luận nghiệm cho phương trình.

Ví dụ 1: *Giải phương trình*: $|x + 4| + 3x = 5$.

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $x + 4 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -4$. (1)

Khi đó, phương trình có dạng:

$$x + 4 + 3x = 5 \Leftrightarrow 4x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}, \text{ thoả mãn điều kiện (1).}$$

Trường hợp 2: Nếu $x + 4 < 0 \Leftrightarrow x < -4$. (2)

Khi đó, phương trình có dạng:

$$-(x + 4) + 3x = 5 \Leftrightarrow 2x = 9 \Leftrightarrow x = \frac{9}{2}, \text{ không thoả mãn (2).}$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = \frac{1}{4}$.

Cách 2: Viết lại phương trình dưới dạng: $|x + 4| = 5 - 3x$.

Với điều kiện: $5 - 3x \ge 0 \Leftrightarrow x \le \frac{5}{3}$. (*)

Khi đó, phương trình được biến đổi:

$$|x + 4| = 5 - 3x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 4 = 5 - 3x \\ x + 4 = -(5 - 3x) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{4} \\ x = \frac{9}{2} \text{ không thoả mãn (*)} \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = \frac{1}{4}$.

☛ ***Chú ý***: Qua ví dụ trên, đối với các em học sinh hẳn thấy rằng " *Cả hai cách giải được trình bày đều có độ phức tạp như nhau* ". Chính vì vậy, tại đây đặt ra một câu hỏi " *Trong trường hợp nào cách 1 tỏ ra hiệu quả hơn cách 2 và ngược lại ?* " – Câu trả lời các em sẽ nhận được trong ví dụ 3.

Ví dụ 2: (Bài 36/tr 51 – Sgk): *Giải các phương trình sau:*

a. $|2x| = x - 6.$ b. $|4x| = 2x + 12.$

c. $|-3x| = x - 8.$ d. $|-5x| - 16 = 3x.$

✍ *Giải*

a. Ta có: $|2x| = \left[\begin{array}{l} 2x \text{ nếu } x \geq 0 \\ -2x \text{ nếu } x < 0 \end{array}\right.$

Do đó: $|2x| = x - 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = x - 6 \text{ nếu } x \geq 0 \\ -2x = x - 6 \text{ nếu } x < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = -6 \text{ nếu } x \geq 0 & \text{(loại)} \\ x = 2 \text{ nếu } x < 0 & \text{(loại)} \end{array}\right.$

Vậy, bất phương trình vô nghiệm

b. Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $x \geq 0$, ta có: $4x = 2x + 12 \Leftrightarrow x = 6$ (thoả mãn).

Trường hợp 2: Nếu $x < 0$, ta có: $-4x = 2x + 12 \Leftrightarrow x = -2$ (thoả mãn).

Vậy, bất phương trình có hai nghiệm.

c. Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $x \geq 0$, ta có: $-3x = x - 8 \Leftrightarrow x = 2$ (thoả mãn).

Trường hợp 2: Nếu $x < 0$, ta có: $3x = x - 8 \Leftrightarrow x = -4$ (thoả mãn).

Vậy, bất phương trình có hai nghiệm.

d. Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $x \geq 0$, ta có: $-5x - 16 = 3x \Leftrightarrow x = -2$ (loại).

Trường hợp 2: Nếu $x < 0$, ta có: $5x - 16 = 3x \Leftrightarrow x = 8$ (loại).

Vậy, bất phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 3: (Bài 37/tr 51 – Sgk): *Giải các phương trình sau:*

a. $|x - 7| = 2x + 3.$ b. $|x + 4| = 2x - 5.$

c. $|x + 3| = 3x - 1.$ d. $|x - 4| + 3x = 5.$

✍ *Giải*

a. Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: $x - 7 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 7$, ta có: $x - 7 = 2x + 3 \Leftrightarrow x = -10$ (loại)

Trường hợp 2: $x - 7 < 0 \Leftrightarrow x < 7$, ta có:

$$-x + 7 = 2x + 3 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} < 7 \text{ (thoả mãn).}$$

Vậy, phương trình có 1 nghiệm.

b. Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: $x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -4$, ta có:

$$x + 4 = 2x - 5 \Leftrightarrow x = 9 \text{ (thoả mãn).}$$

Trường hợp 2: $x + 4 < 0 \Leftrightarrow x < -4$, ta có:

$$-x - 4 = 2x - 5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} > -4 \text{ (loại).}$$

Vậy, phương trình có 1 nghiệm.

c. Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: $x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$, ta có:

$$x + 3 = 3x - 1 \Leftrightarrow x = 2 \text{ (thoả mãn).}$$

Trường hợp 2: $x + 3 < 0 \Leftrightarrow x < -3$, ta có:

$$-x - 3 = 3x - 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ (loại).}$$

Vậy, phương trình có 1 nghiệm.

d. Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: $x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$, ta có:

$$x - 4 + 3x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{9}{4} \text{ (loại).}$$

Trường hợp 2: $x - 4 < 0 \Leftrightarrow x < 4$, ta có:

$$-x + 4 + 3x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ (thoả mãn).}$$

Vậy, phương trình có 1 nghiệm.

Ví dụ 4: *Giải các phương trình*:

a. $|x + 1| = x^2 + x$. b. $|x^2 - 2x| + 4 = 2x$.

✍ *Giải*

a. Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$. (1)

Khi đó, phương trình có dạng:

$x + 1 = x^2 + x \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$, thoả mãn điều kiện (1).

Trường hợp 2: Nếu $x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -1$. (2)

Khi đó, phương trình có dạng:

$-(x + 1) = x^2 + x \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = -1$, không thoả mãn điều kiện (2).

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = \pm 1$.

b. Viết lại phương trình dưới dạng: $|x^2 - 2x| = 2x - 4$.

Với điều kiện: $2x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$. (*)

Khi đó, phương trình được biến đổi:

$$|x^2 - 2x| = 2x - 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x = 2x - 4 \\ x^2 - 2x = -(2x - 4) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 4x + 4 = 0 \\ x^2 = 4 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x - 2)^2 = 0 \\ x = \pm 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \text{ không thoả mãn (*)} \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 2$.

☞ *Nhận xét*:

1. Trong câu a), chúng ta đã lựa chọn cách 1 để thực hiện là bởi nếu sử dụng cách 2 chúng ta sẽ gặp một bất lợi khi phải giải bất phương trình $x^2 + x \ge 0$. Tuy nhiên, cũng có thể khắc phục được vấn đề này bằng việc "*Không đi giải điều kiện mà cứ tiếp tục thực hiện sau đó thử lại*", cụ thể:

Với điều kiện: $x^2 + x \ge 0$. (*)

Khi đó, phương trình được biến đổi: $|x + 1| = x^2 + x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1 = x^2 + x \\ x+1 = -(x^2+x) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 + 2x + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ (x+1)^2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right..$$

Thử lại:

- Với $x = 1$ ta được $x^2 + x = 1^2 + 1 = 2 \ge 0$ luôn đúng.
- Với $x = -1$ ta được $x^2 + x = (-1)^2 - 1 = 0 \ge 0$ luôn đúng.

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = \pm 1$.

2. Trong câu b), chúng ta đã lựa chọn cách 2 để thực hiện là bởi nếu sử dụng cách 1 chúng ta sẽ gặp một bất lợi khi phải giải bất phương trình $x^2 - 2x \ge 0$ và $x^2 - 2x < 0$. Tuy nhiên, cũng có thể khắc phục được vấn đề này bằng việc " *Không đi giải điều kiện mà cứ tiếp tục thực hiện sau đó thử lại*" – Đề nghị bạn đọc tự làm.
3. Một câu hỏi sẽ được đặt ra tại đây là " *Với một phương trình có dạng đặc biệt hơn một chút (thí dụ* $2|x - 1| = x^2 - 2x - 2$) *thì ngoài việc lựa chọn một trong hai cách giải đã biết thì còn có một phương pháp giải khác không ?*" – Câu trả lời " *Đương nhiên sẽ có* ". Ví dụ sau sẽ minh hoạ phương pháp đặt ẩn phụ để giải phương trình này.

Ví dụ 4: *Giải phương trình*: $2|x - 1| = x^2 - 2x - 2$.

✍ *Giải*

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$(x^2 - 2x + 1) - 2|x - 1| - 3 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 - 2|x - 1| - 3 = 0. \quad (1)$$

Đặt $t = |x - 1|$, điều kiện $t \ge 0$.

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 3t + 3 = 0 \Leftrightarrow t(t + 1) - 3(t + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (t + 1)(t - 3) = 0 \underset{t+1\ge 1}{\overset{t\ge 0}{\Leftrightarrow}} t = 3.$$

Với $t = 3$, ta được: $\Leftrightarrow |x - 1| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 3 \\ x - 1 = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

Vậy, phương trình có 2 nghiệm là $x = 4$ hoặc $x = -2$.

☛ ***Chú ý***: Tiếp theo chúng ta sẽ sử dụng một ví dụ để minh hoạ phương pháp giải phương trình chứa nhiều hơn 1 dấu giá trị tuyệt đối.

Ví dụ 5: *Giải phương trình*:

$$|x-1|+|x-3|=2.$$

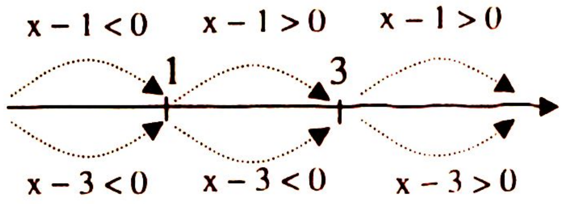
✍ *Giải*

Nhận xét rằng:

$x-1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 1,$

$x-3\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 3,$

do đó, để thực hiện việc bỏ dấu giá trị tuyệt đối cho phương trình chúng ta cần phải xét ba trường hợp.



Trường hợp 1: Nếu $x\le 1$. (1)

Khi đó, phương trình có dạng: $-(x-1)-(x-3)=2 \Leftrightarrow -2x+4=2$

$\Leftrightarrow x=1$, thoả mãn điều kiện (1).

Trường hợp 2: Nếu $1<x<3$. (2)

Khi đó, phương trình có dạng: $(x-1)-(x-3)=2 \Leftrightarrow 2=2$, luôn đúng.

Trường hợp 3: Nếu $x\ge 3$. (3)

Khi đó, phương trình có dạng: $(x-1)+(x-3)=2 \Leftrightarrow 2x-4=2$

$\Leftrightarrow x=3$, thoả mãn điều kiện (3).

Vậy, phương trình có nghiệm $1\le x\le 3$.

☛ ***Chú ý***: Qua kết quả của phương trình trên, chúng ta nhận thấy một điều rất thú vị là nghiệm của phương trình có thể là một đoạn trên trục số.

Ví dụ 6: *Giải phương trình*: $\dfrac{3}{|x+1|}+\dfrac{|x+1|}{3}=2.$ (1)

✍ *Giải*

Điều kiện xác định của phương trình là $x\ne -1$.

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Đặt $t=\dfrac{|x+1|}{3}$, điều kiện $t>0$.

Khi đó: (1) $\Leftrightarrow \dfrac{1}{t}+t=2 \Leftrightarrow t^2-2t+1=0 \Leftrightarrow t=1$

$$\Leftrightarrow \frac{|x+1|}{3}=1 \Leftrightarrow |x+1|=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=3 \\ x+1=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-4 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có 2 nghiệm $x=2$ và $x=-4$.

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta được:

$$VT = \frac{3}{|x+1|} + \frac{|x+1|}{3} \geq 2.\sqrt{\frac{3}{|x+1|}.\frac{|x+1|}{3}} = 2 = VP.$$

Vậy phương trình tương đương với :

$$\frac{3}{|x+1|} = \frac{|x+1|}{3} \Leftrightarrow 9 = (x+1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=3 \\ x+1=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-4 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có 2 nghiệm x = 2 và x = – 4.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Bỏ dấu giá trị tuyệt đối và rút gọn các biểu thức:

a. $A = |x - 3| + x - 2$ trong hai trường hợp $x \geq 3$ và $x < 3$.

b. $B = 2x + 3 - |-2x|$ trong hai trường hợp $x \geq 1$ và $x < 0$.

c. $C = |x - 4| - 3x + 11$ trong hai trường hợp $x \geq 5$ và $x < 3$.

d. $D = |x - 1| + |x - 2| + |2x - 5|$ trong hai trường hợp $x > 4$ và $x < -1$.

Bài 2: Giải các phương trình:

a. $|x - 4| = 5$.

b. $|2x - 3| = 4$.

c. $|3 - 2x| = 7$.

d. $|1 - 5x| - 1 = 3$.

Bài 3: Giải các phương trình:

e. $|2x - 3| + 2 = 8$.

f. $|4x + 3| + 1 = 0$.

g. $4|2x - 1| + 3 = 15$.

h. $3|x - 1| - 3 = 5$.

Bài 4: Giải các phương trình:

a. $|x - 3| = |2x|$.

b. $|2x - 1| = |x - 1|$.

c. $|3x - 1| = |x - 2|$.

d. $|5x - 4| = |4 - 3x|$.

Bài 5: Giải các phương trình:

a. $\left|\frac{x-1}{x}\right| = 2$.

b. $\left|\frac{2x-1}{x-1}\right| - 1 = 0$.

Bài 6: Giải các phương trình:

a. $|x - 2| = 18 - 3x$.

b. $|x + 3| = 2x - 1$.

c. $|5x - 3| = x + 7$.

d. $|5 - 2x| + x = 1$.

Bài 7: Giải các phương trình sau với m là tham số:

a. $|x - 2m| = |3x + 4|$.

b. $|3x + 2| = |x - 2m|$.

Bài 8: * Giải các phương trình:

a. $|x - 1| = x^2 - x$.

b. $|x - 1| = x^3 + x + 1$.

c. $|4x^2 - 2x| + 1 = 2x$.

d. $|x^2 - 5x + 4| = x + 4$.

Bài 9: * Giải các phương trình sau với m là tham số:

a. $|mx + 1| = |x + 1|$.

b. $|(m + 2)x - 3| = |mx - 4|$.

Bài 10: Giải và biện luận phương trình:

a. $|mx + 1| = |2x + m - 3|$.

b. $|x - 1| = mx + 2m - 1$.

c. $2(|x| + m - 1) = |x| - m + 3$.

Bài 11: * Giải các phương trình:

a. $|x - 2| + |x - 4| = 2$.

b. $|x - 1| + |2x - 6| = 7$.

c. $|x - 1| + |x - 2| + |x - 3| = 6$.

d. $|x - 1| - 2|x - 2| + 3|x - 3| = 4$.

Bài 12: * Giải các phương trình:

a. $|x^2 - 4x + 3| + |x^2 - 4x| = 3$.

b. $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = 2$.

Bài 13: * Giải các phương trình:

a. $(x + 3)\sqrt{10 - x^2} = x^2 - x - 12$.

b. $\sqrt{x - \sqrt{x - \sqrt{x - \sqrt{x - 5}}}} = 5$.

Bài 14: Tìm tất cả số thực a, b, c để:

$$|ax + by + cz| + |bx + cy + az| + |cx + ay + bz| = |x| + |y| + |z|$$

là đẳng thức đúng $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1:

a. $A = \begin{cases} 2x - 5 & \text{khi } x \geq 3 \\ 1 & \text{khi } x < 3 \end{cases}$.

b. $B = \begin{cases} 4x + 3 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$.

c. $C = \begin{cases} -2x + 7 & \text{khi } x \geq 5 \\ -4x + 15 & \text{khi } x < 3 \end{cases}$.

d. $D = \begin{cases} 4x - 8 & \text{khi } x > 4 \\ -4x - 8 & \text{khi } x < -1 \end{cases}$.

Bài 2:

a. $x = 9, x = -1$.

b. $x = \frac{7}{2}, x = -\frac{1}{2}$.

c. $x = 5, x = -2$.

d. $x = 1, x = -\frac{3}{5}$.

Bài 3:

a. $x = \frac{9}{2}, x = -\frac{3}{2}$.

b. Vô nghiệm.

c. $x = 2, x = -1$.

d. $x = \frac{11}{3}, x = -\frac{5}{3}$.

Bài 4:

a. $x = -3, x = 1$.

b. $x = 0, x = \frac{2}{3}$.

c. $x = -\frac{1}{2}, x = \frac{3}{4}$.

d. $x = 1, x = 0$.

Bài 5:

a. $x = -1, x = \frac{1}{3}$.

b. $x = 0, x = \frac{2}{3}$.

Bài 6:

a. $x = 5$.

b. $x = 4$.

c. $x = \frac{5}{2}, x = -\frac{2}{3}$.

d. $x = 3$.

Bài 7: a. $x = m - 2, x = \frac{1}{2}(m - 2)$. b. $x = -m - 1, x = \frac{1}{2}(m - 1)$.

Bài 8:

a. Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$. (1)

Khi đó, phương trình có dạng: $x - 1 = x^2 - x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0$

$\Rightarrow x = 1$, thoả mãn điều kiện (1).

Trường hợp 2: Nếu $x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$. (2)

Khi đó, phương trình có dạng: $-x + 1 = x^2 - x \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

$\Rightarrow x = -1$, thoả mãn điều kiện (2).

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = \pm 1$.

b. Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$. (1)

Khi đó, phương trình có dạng: $x - 1 = x^3 + x + 1 \Leftrightarrow x^3 = -2$

$\Rightarrow x = -\sqrt[3]{2}$, không thoả mãn điều kiện (1).

Trường hợp 2: Nếu $x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$. (2)

Khi đó, phương trình có dạng:

$-x + 1 = x^3 + x + 1 \Leftrightarrow x^3 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, thoả mãn điều kiện (2).

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 0$.

c. Biến đổi phương trình về dạng: $|4x^2 - 2x| = 2x - 1$.

Với điều kiện: $2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$. (*)

Khi đó, phương trình được biến đổi:

$$|4x^2 - 2x| = 2x - 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^2 - 2x = 2x - 1 \\ 4x^2 - 2x = -(2x - 1) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^2 - 4x + 1 = 0 \\ 4x^2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (2x - 1)^2 = 0 \\ x = \pm\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = \frac{1}{2}$.

Bài 12.

a. Ta biến đổi phương trình về dạng:

$$|x^2 - 4x + 3| + |x^2 - 4x| = (x^2 - 4x + 3) - (x^2 - 4x)$$

$$\xleftrightarrow{\text{Tính chất}} \begin{cases} x^2 - 4x + 3 \ge 0 \\ x^2 - 4x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \ge 3 \\ x \le 1 \end{array}\right. \\ 0 \le x \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \le x \le 1 \\ 3 \le x \le 4 \end{array}\right..$$

Vậy, nghiệm của phương trình là $[0, 1] \cup [3, 4]$.

b. Ta biến đổi phương trình về dạng: $\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} = 2$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{x-1}+1| - |\sqrt{x-1} - 1| = |(\sqrt{x-1}+1) - (\sqrt{x-1}-1)|$$

$$\xleftrightarrow{\text{Tính chất 4}} (\sqrt{x-1} - 1).2 \ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} \ge 1 \Leftrightarrow x \ge 2.$$

Vậy, phương trình có nghiệm là $x \ge 2$.

☞ ***Nhận xét***:

1. Lời giải của bài toán trên được xây dựng dựa trên các tính chất của trị tuyệt đối, cụ thể chúng ta có:

   Tính chất 1. Nếu $|a + b| = |a| + |b| \Leftrightarrow ab \ge 0$.

   Tính chất 2. Nếu $|a| + |b| = a + b \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge 0 \\ b \ge 0 \end{cases}$.

   Tính chất 3. Nếu $|a| + |b| = a - b \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge 0 \\ b \le 0 \end{cases}$.

   Tính chất 4. Nếu $|a - b| = |a| - |b| \Leftrightarrow b(a - b) \ge 0$.

2. Bài toán trên có thể giải nhờ *tính chất 2* như sau:

$$|x^2 - 4x + 3| + |4x - x^2| = (x^2 - 4x + 3) + (4x - x^2)$$

$$\xleftrightarrow{\text{Tính chất 2}} \begin{cases} x^2 - 4x + 3 \ge 0 \\ 4x - x^2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \le x \le 1 \\ 3 \le x \le 4 \end{array}\right..$$

3. Đôi khi cần sử dụng một vài phép biến đổi để làm xuất hiện tính chất. Các phương trình được giải bằng phương pháp *sử dụng các tính chất giá trị tuyệt đối* ở dạng ban đầu thường không thấy xuất hiện dấu trị tuyệt đối, nó thường xuất hiện sau phép biến đổi: $\sqrt{A^2} = |A|$.

Bài 13.

a. Điều kiện: $10 - x^2 \ge 0 \Leftrightarrow |x| \le \sqrt{10}$. (*)

Nhận xét rằng: $x^2 - x - 12 = x^2 - 9 - x - 3 = (x + 3)(x - 4)$

do đó, phương trình được viết lại:

$$(x + 3)\sqrt{10 - x^2} = (x + 3)(x - 4) \Leftrightarrow (x + 3)[\sqrt{10 - x^2} - (x - 4)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x + 3 = 0 & (1) \\ \sqrt{10 - x^2} - (x - 4) = 0 & (2) \end{array}\right..$$

- Giải (1), ta được nghiệm $x = -3$, thoả mãn điều kiện (*).

- Giải (2), bằng phép biến đổi tương đương:

$$\Leftrightarrow \sqrt{10-x^2} = x-4 \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 \ge 0 \\ 10-x^2 = (x-4)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 4 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 4 \\ (x-1)(x-3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 4 \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right. \end{cases}, \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy, phương trình có nghiệm x = –3.

b. Điều kiện: $x \ge 5$.

Đặt: $\sqrt{x - \sqrt{x-5}} = t \ (x \ge t \ge 0)$ thì phương trình trở thành: $\sqrt{x - \sqrt{x-t}} = 5$.

Ta xét ba trường hợp sau:

- Nếu $t < 5 \Rightarrow x - t > x - 5 \ge 0 \Rightarrow \sqrt{x-t} > \sqrt{x-5}$

$$\Rightarrow x - \sqrt{x-t} < x - \sqrt{x-5}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x-\sqrt{x-t}} < \sqrt{x-\sqrt{x-5}} \Leftrightarrow 5 < t \text{ (vô lí).}$$

- Nếu $t > 5 \Rightarrow 0 \le x - t < x - 5 \Rightarrow \sqrt{x-t} < \sqrt{x-5}$

$$\Rightarrow x - \sqrt{x-t} > x - \sqrt{x-5}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x-\sqrt{x-t}} > \sqrt{x-\sqrt{x-5}} \Leftrightarrow 5 > t \text{ (vô lí).}$$

- Nếu t = 5, do đó: $\sqrt{x-\sqrt{x-5}} = 5$ ts $x - 25 = \sqrt{x-5}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 25 \\ (x-25)^2 = x-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 25 \\ x^2 - 51x + 630 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 30.$$

Vậy, phương trình đã cho có một nghiệm là x = 30.

☞ ***Nhận xét***:

1. Ta có thể đưa ra bài toán tổng quát hơn:

" Phương trình: $\sqrt{x-\sqrt{x-\sqrt{x-...\sqrt{x-m}}}} = m$. (2)

trong đó m > 1 và vế trái của (2) có n dấu căn, $n \in \mathbf{N}^*$, luôn có nghiệm duy nhất $x = m^2 + m$ ".

2. Học sinh có thể mắc sai lầm khi khẳng định:

" Phương trình (2) luôn có nghiệm duy nhất

$x = m^2 + m$ với $\forall m > 0$".

Điều này không đúng vì chẳng hạn:

- Phương trình $\sqrt{x-\sqrt{x-\sqrt{x-\sqrt{x-1}}}} = 1$ nhận x = 1, x = 2 là các nghiệm.
- Phương trình $\sqrt{x-\sqrt{x-\sqrt{x-\sqrt{x-\frac{1}{4}}}}} = 1$ có hai nghiệm là $x = \frac{5}{16}$ và $x = \frac{13}{16}$.

Và hoàn toàn sai lầm nếu thay liên tiếp $5 = \sqrt{x - \sqrt{x - \sqrt{x - \sqrt{x - 5}}}}$

vào vế trái của (1) để được phương trình có "vô hạn" dấu căn và từ đó kết luận $\sqrt{x-5} = 5$.

Bài 14.

Điều kiện cần: do đẳng thức đúng với mọi x, y, z ∈ **R** nên với các giá trị (1, 1, 1), (1, 0, 0), (1, – 1, 0) của (x, y, z), từ đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} |a+b+c| = 1 & (1) \\ |a|+|b|+|c| = 1 & (2) \\ |a-b|+|b-c|+|c-a| = 2 & (3) \end{cases}$$

Từ (1) và (2), suy ra a, b, c cùng dấu hoặc bằng 0, nghĩa là:

$$\begin{cases} ab \geq 0 \\ bc \geq 0. \\ ca \geq 0 \end{cases} \qquad (4)$$

Từ (2) và (3), kết hợp với bất đẳng thức $|x-y| \leq |x| + |y|$, ta có:

$$2 = |a-b| + |b-c| + |c-a| \leq 2|a| + 2|b| + 2|c|$$

$$\Leftrightarrow |a| + |b| + |c| \geq 1 = |a| + |b| + |c|$$

Suy ra, các dấu bằng phải xảy ra, hay:

$$\begin{cases} ab \leq 0 \\ bc \leq 0. \\ ca \leq 0 \end{cases} \qquad (5)$$

Từ (4) và (5), ta có: ab = bc = ca = 0 hay hai trong ba số a, b, c phải bằng 0.

Kết hợp với (1), ta có số còn lại phải bằng ± 1.

Điều kiện đủ: thay các giá trị (± 1, 0, 0), (0, ± 1, 0), (0, 0, ± 1) cho bộ ba (a, b, c) vào đẳng thức đang xét, ta được các đẳng thức đúng với mọi x, y, z ∈ **R**.

Vậy, bộ (a, b, c) cần tìm là (± 1, 0, 0), (0, ± 1, 0), (0, 0, ± 1).

☛ ***Nhận xét***:

1. Trong lời giải trên ta đã chọn ra ba bộ số (1, 1, 1), (1, 0, 0), (1, – 1, 0) cho (x, y, z) để nhận được một hệ phương trình theo ba ẩn a, b, c. Rồi thực hiện giải hệ phương trình này bằng phương pháp đánh giá dựa trên bất đẳng thức:
$$|x-y| \leq |x| + |y|.$$
2. Cũng có thể đề xuất một cách giải gần tương tự bằng việc chọn ra ba bộ số (1, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 1, 0) cho (x, y, z) để nhận được một hệ phương trình theo ba ẩn a, b, c. Rồi thực hiện giải hệ phương trình này bằng phương pháp đánh giá dựa trên bất đẳng thức $|x+y| \leq |x| + |y|$.
3. Thiếu sót thường gặp ở các em học sinh khi thực hiện bài toán trên là quên nêu điều kiện đủ.

Bài đọc thêm

BẤT PHƯƠNG TRÌNH CÓ HỆ SỐ CHỮ

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Chúng ta sẽ bắt đầu với việc giải bất phương trình:

$$ax - 8 < 0 \Leftrightarrow ax < 8 \Leftrightarrow x < \frac{8}{a}.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x < \frac{8}{a}$.

☞ ***Nhận xét***: Ta thấy ngay:

1. Với $a = 1$ thì nghiệm là $x < 8$, tức lời giải trên là đúng.
2. Với $a = 0$ thì $\frac{8}{a}$ không xác định do đó lời giải trên là sai.
3. Với $a = -2$ thì theo cách giải trên ta nghiệm là $x < -4$.

   Tuy nhiên, thực tế với $a = -2$ bất phương trình có dạng:

   $-2x - 8 < 0 \Leftrightarrow -2x < 8 \Leftrightarrow x > -4.$

   Tức lời giải trên là sai.

   Như vậy, khi giải bất phương trình có hệ số chữ, ta cần chú ý đến các trường hợp nhỏ hơn 0, bằng 0 và lớn hơn 0 của hệ số của x, đó được gọi là " *Giải và biện luận bất phương trình theo tham số* ".

2. GIẢI VÀ BIỆN LUẬN PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Bài toán: Giải và biện luận bất phương trình

$$ax + b < 0.$$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Viết lại bất phương trình dưới dạng:

$$ax < -b. \qquad (1)$$

Ta xét ba trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $a = 0$.

$(1) \Leftrightarrow 0 < -b \Leftrightarrow b < 0.$

Vậy, ta được:

- Nếu $b < 0$, bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.
- Nếu $b \geq 0$, bất phương trình vô nghiệm.

Trường hợp 2: Nếu $a > 0$.

$(1) \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}.$

Trường hợp 3: Nếu a < 0.

$$(1) \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}.$$

Kết luận:

- Với a = 0 và b < 0, bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.
- Với a = 0 và b ≥ 0, bất phương trình vô nghiệm.
- Với a > 0, nghiệm của bất phương trình là $x < -\frac{b}{a}$.
- Với a < 0, nghiệm của bất phương trình là $x > -\frac{b}{a}$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: *Giải và biện luận bất phương trình:*

$$mx + 1 \le -m^2.$$

✍ *Giải*

Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$mx \le -m^2 - 1. \qquad (1)$$

Xét ba trường hợp:

Trường hợp 1: Với m = 0, ta được:

$(1) \Leftrightarrow 0 \le -1$, mâu thuẫn.

Trường hợp 2: Với m > 0, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow x \le -\frac{m^2+1}{m}.$$

Trường hợp 3: Với m < 0, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow x \ge -\frac{m^2+1}{m}.$$

Kết luận:

- Với m = 0, bất phương trình vô nghiệm.
- Với m > 0, bất phương trình có nghiệm là $x \le -\frac{m^2+1}{m}$.
- Với m < 0, bất phương trình có nghiệm là $x \ge -\frac{m^2+1}{m}$.

Ví dụ 2: *Tìm m để bất phương trình*: $m^2x + 4m - 3 < x + m^2$ *vô nghiệm* .

✍ *Giải*

Viết lại bất phương trình dưới dạng:

$$(m^2 - 1)x - (m^2 - 4m + 3) < 0. \qquad (1)$$

Khi đó, bất phương trình vô nghiệm:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 = 0 \\ -(m^2 - 4m + 3) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ 1 \le m \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy, với $m = 1$ bất phương trình vô nghiệm:

Ví dụ 3: *Xác định* m *sao cho hai bất phương trình sau tương đương*

$$(m - 1)x - m + 3 > 0 \text{ và } (m + 1)x - m + 2 > 0.$$

✍ *Giải*

Viết lại các bất phương trình dưới dạng:

$(m - 1)x > m - 3$, (1)

$(m + 1)x > m - 2.$ (2)

Ta đi xét các trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $m = 1$.

(1) $\Leftrightarrow 0x > -2$, luôn đúng. (2) $\Leftrightarrow x > -\dfrac{1}{2}$.

Vậy, (1) và (2) không tương đương.

Trường hợp 2: Nếu $m = -1$.

(1) $\Leftrightarrow x < 2$. (2) $\Leftrightarrow 0x > -3$, luôn đúng.

Vậy, (1) và (2) không tương đương.

Trường hợp 3: Nếu $m \ne \pm 1$.

Khi đó, (1) và (2) tương đương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m - 1)(m + 1) > 0 \\ \dfrac{m - 3}{m - 1} = \dfrac{m - 2}{m + 1} \end{cases} \Leftrightarrow m = 5.$$

Vậy, với $m = 5$, hai bất phương trình tương đương với nhau.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Giải và biện luận các bất phương trình:

$$(m^2 + m + 1)x + 3m > (m^2 + 2)x + 5m - 1.$$

Bài 2: Giải và biện luận các bất phương trình:

a. $x + \dfrac{x - 1}{m + 1} > \dfrac{x + 1}{m + 1} - mx.$

b. $x + \dfrac{x - 1}{m} > \dfrac{x + 1}{m} - (m + 1)x$, với $m \ne 0$.

Bài 3: Giải và biện luận bất phương trình:

$x + 1 > \dfrac{ax}{b} + \dfrac{b}{a}$, với $a, b > 0$.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài tập 1: Biến đổi bất phương trình về dạng $(m - 1)x > 2m - 1$.

- Với $m = 1$, ta được:

  $0 > -1$, luôn đúng.

- Với $m > 1$, ta được $x > \dfrac{2m-1}{m-1}$.

- Với $m < 0$, ta được $x < \dfrac{2m-1}{m-1}$.

Bài tập 2:

a. Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$x + \frac{x}{m+1} - \frac{1}{m+1} > \frac{x}{m+1} + \frac{1}{m+1} - mx \Leftrightarrow (m+1)x > \frac{2}{m+1}.$$

- Với $m = -1$, bất phương trình vô nghiệm.

- Với $m > -1$, ta được $x > \dfrac{2}{(m+1)^2}$.

- Với $m < -1$, ta được $x < \dfrac{2}{(m+1)^2}$.

b. Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$x + \frac{x}{m} - \frac{1}{m} > \frac{x}{m} + \frac{1}{m} - (m+1)x \Leftrightarrow (m+2)x > \frac{2}{m}.$$

- Với $m = -2$, bất phương trình vô nghiệm.

- Với $m > -2$, ta được $x > \dfrac{2}{m(m+2)}$.

- Với $m < -2$, ta được $x < \dfrac{2}{m(m+2)}$.

Bài tập 3: Biến đổi bất phương trình về dạng $a(a - b)x < b(a - b)$.

- Với $a = b$, bất phương trình vô nghiệm.

- Với $a > b$, ta được $x < \dfrac{b}{a}$.

- Với $a < b$, ta được $x > \dfrac{b}{a}$.

Bài đọc thêm
BẤT ĐẲNG THỨC

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. ĐỊNH NGHĨA

Bất đẳng thức là hệ thức có một trong các dạng:

$A > B, A \ge B;$ $\qquad$ $A < B, A \le B.$

2. TÍNH CHẤT CƠ BẢN

Với a, b, c, d là các số thực, ta luôn có:

Tính chất 1: Nếu $a > b \Leftrightarrow b < a$.

Tính chất 2: Nếu $a > b$ và $b > c$ thì $a > c$.

Tính chất 3: Nếu $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$.

Tính chất 4: Nếu $a > b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} ac > bc \text{ nếu } c > 0 \\ ac < bc \text{ nếu } c < 0 \end{array}\right.$ và $\left[\begin{array}{l} \dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c} \text{ nếu } c > 0 \\ \dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c} \text{ nếu } c < 0 \end{array}\right.$.

Tính chất 5: Nếu $a > b$ và $c > d$ thì $a + c > b + d$.

Chú ý quan trọng: không áp dụng được "quy tắc" trên cho phép trừ hai bất đẳng thức cùng chiều.

Tính chất 6: Nếu $a > b > 0$ và $c > d > 0$ thì $ac > bd$.

Tính chất 7: Nếu $a > b$ thì: $\left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b} \text{ nếu } ab > 0 \\ \dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b} \text{ nếu } ab < 0 \end{array}\right.$.

Tính chất 8: Nếu $a > b$ thì $a^{2n+1} > b^{2n+1}$, với $n \in N^*$.

Tính chất 9: Nếu $a > b \ge 0$ thì $a^n > b^n$, với $n \in N^*$.

Tính chất 10: Nếu $a > b \ge 0$ thì $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$, với $n \in N^*$.

B. BẤT ĐẲNG THỨC

CÁC PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Để chứng minh bất đẳng thức A > B, ta lựa chọn một trong các phương pháp sau:

Phương pháp 1: *Phương pháp chứng minh bằng định nghĩa.* Khi đó ta lựa chọn theo các hướng:

Hướng 1: Chứng minh $A - B > 0$.

Hướng 2: Thực hiện các phép biến đổi đại số để biến đổi bất đẳng thức ban đầu về một bất đẳng thức đúng.

Hướng 3: Xuất phát từ bất đẳng thức đúng.

Hướng 4: Biến đổi vế trái hoặc vế phải.

Phương pháp 2: *Sử dụng tính chất bắc cầu*, tức là chứng minh:

$$A > C \text{ và } C > B.$$

Phương pháp 3: *Phương pháp chứng minh phản chứng*, được áp dụng với các bài toán yêu cầu chứng minh ít nhất một bất đẳng thức trong các bất đẳng thức đã cho là đúng hoặc sai.

Phương pháp 4: *Phương pháp hình học*, bằng việc sử dụng tính chất:
" *Nếu* a, b, c *là độ ba cạnh của một tam giác thì*

$$a + b > c \text{ và } |a - b| < c \text{ ".}$$

Ví dụ 1: *Chứng minh rằng với mọi số thực* a, b, c *luôn có*:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

✍ *Giải*

Ta có ba cách trình bày theo phương pháp 1 (mang tính minh hoạ), như sau:

Cách 1: Ta biến đổi bất đẳng thức như sau:

$$a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a^2}{2} - ab + \frac{b^2}{2}\right) + \left(\frac{b^2}{2} - bc + \frac{c^2}{2}\right) + \left(\frac{c^2}{2} - ca + \frac{a^2}{2}\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{2}} - \frac{c}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{c}{\sqrt{2}} - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 \geq 0, \text{ luôn đúng.}$$

Cách 2: Ta biến đổi bất đẳng thức như sau:

$$2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca)$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + b^2 - 2ab) + (b^2 + c^2 - 2bc) + (c^2 + a^2 - 2ca) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0, \text{ luôn đúng.}$$

Cách 3: Ta luôn có: $\begin{cases} (a-b)^2 \geq 0 \\ (b-c)^2 \geq 0 \\ (c-a)^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \\ b^2 + c^2 - 2bc \geq 0 \\ c^2 + a^2 - 2ca \geq 0 \end{cases}.$ (I)

Cộng theo vế các bất phương trình trong hệ (I), ta được:

$$2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca) \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca, \text{ đpcm.}$$

☛ ***Nhận xét***: Như vậy, thông qua ví dụ trên đã minh hoạ cho các em học sinh thấy được ba hướng chứng minh bất đẳng thức khi sử dụng phương pháp 1 và sau đây ta sẽ minh hoạ bằng một ví dụ cho hướng 4.

Ví dụ 2: *Chứng minh rằng với mọi* $n \in N^*$ *luôn có*:

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} < 1.$$

✍ *Giải*

Nhận xét rằng: $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$,

do đó: $VT = (1 - \dfrac{1}{2}) + (\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}) + ... + (\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}) = 1 - \dfrac{1}{n+1} < 1$, đpcm.

Ví dụ 3: Chứng minh rằng với mọi a, b ∈ **R** luôn có:

$$\frac{a+b}{2}.\frac{a^2+b^2}{2}.\frac{a^3+b^3}{2} \le \frac{a^6+b^6}{2}.$$

✍ *Giải*

Ta đi chứng minh với mọi x, y luôn có: $\dfrac{x+y}{2}.\dfrac{x^3+y^3}{2} \le \dfrac{x^4+y^4}{2}$. (*)

Thật vậy: (*) $\Leftrightarrow (x+y)(x^3+y^3) \le 2(x^4+y^4) \Leftrightarrow xy(x^2+y^2) \le x^4+y^4$

$$\Rightarrow (x-y)^2\left[\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4}\right] \ge 0, \text{ luôn đúng.}$$

Khi đó áp dụng (*), ta được:

$$\frac{a+b}{2}.\frac{a^2+b^2}{2}.\frac{a^3+b^3}{2} = \left[\frac{a+b}{2}.\frac{a^3+b^3}{2}\right].\frac{a^2+b^2}{2}$$

$$\le \frac{a^4+b^4}{2}.\frac{a^2+b^2}{2} \le \frac{a^6+b^6}{2}, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 4: *Cho* a, b, c∈(0, 1), *chứng minh rằng ít nhất một trong các bất đẳng thức sau là sai:* $a(1-b) > \dfrac{1}{4}$, $b(1-c) > \dfrac{1}{4}$, $c(1-a) > \dfrac{1}{4}$.

✍ *Giải*

Giả sử trái lại cả ba bất đẳng thức đều đúng, khi đó nhân theo vế ba bất đẳng thức ta được:

$$a(1-b).b(1-c).c(1-a) > \frac{1}{64} \Leftrightarrow a(1-a).b(1-b).c(1-c) > \frac{1}{64}. \ (*)$$

Ta có nhận xét: $a(1-a) = a - a^2 = \dfrac{1}{4} - (a + \dfrac{1}{2})^2 \le \dfrac{1}{4}$,

Chứng minh tương tự, ta có $b(1-b) \le \dfrac{1}{4}$, $c(1-c) \le \dfrac{1}{4}$,

do đó: $a(1-a).b(1-b).c(1-c) \le \dfrac{1}{64}$, tức là (*) sai.

Ví dụ 5: *Cho* a, b, c *là độ dài 3 cạnh của một tam giác vuông với* a *là cạnh huyền. Chứng minh rằng*: $a^3 > b^3 + c^3$.

✍ *Giải*

Vì a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác vuông với a là cạnh huyền nên $a > b$ và $a > c$.

Theo định lí Pitago, ta có: $a^2 = b^2 + c^2$.

Ta có nhận xét:

$$a^3 = a^2.a = (b^2 + c^2).a = b^2.a + c^2.a \underset{a>c}{\overset{a>b}{>}} b^2.b + c^2.c = b^3 + c^3, \text{ đpcm.}$$

☞ ***Chú ý***: Ở đây, ta còn có kết quả tổng quát hơn:

"*Cho* a, b, c *là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông với* a *là cạnh huyền ta luôn có* $a^n \ge b^n + c^n$, *với* $n \in \mathbf{N}$ *và* $n \ge 2$ ".

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1: Xác định tính đúng, sai của các bất đẳng thức sau và nêu lời giải thích:

a. $(ab + bc + ca)^2 \ge 3abc(a + b + c)$, với $a, b, c \in \mathbf{R}$.

b. $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \ge a(b + c + d)$, với $a, b, c, d \in \mathbf{R}$.

c. $a^4 + b^4 < ab(a^2 + b^2)$, với $a, b \in \mathbf{R}$.

d. $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$, với a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Bài 2: Với $0 \le x, y, z \le 1$, chứng minh rằng: $2(x^3 + y^3 + z^3) - (x^2y + y^2z + z^2x) \le 3$.

Bài 3: Cho ba số $a, b, c > 0$ và $a + b + c \le 1$. Chứng minh rằng:

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) \ge 64.$$

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1:

a. Bất đẳng thức là đúng với mọi số thực a, b, c bởi:

$$\text{bđt} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(ab - bc)^2 + \frac{1}{2}(bc - ca)^2 + \frac{1}{2}(ca - ab)^2 \ge 0, \text{ luôn đúng.}$$

b. Bất đẳng thức là đúng với mọi số thực a, b, c, d bởi:

$$\text{bđt} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2} - b\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - c\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - d\right)^2 \ge 0, \text{ luôn đúng.}$$

c. Bất đẳng thức là sai bởi với $a = b = 0$, ta được $0 < 0$.

d. Bất đẳng thức là đúng bởi: $\begin{cases} |a-b| < c \\ |b-c| < a \\ |c-a| < b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)^2 < c^2 \\ (b-c)^2 < a^2 \\ (c-a^2 < b^2 \end{cases}$

cộng theo vế ta được đpcm.

BẤT ĐẲNG THỨC CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Ta có các tính chất sau:

Tính chất 1. Với hai số thực a, b tuỳ ý: $a^2 > b^2 \Leftrightarrow |a| > |b|$.

Tính chất 2. Ta có: $-b \le a \le b \Leftrightarrow |a| < b$.

Tính chất 3. Ta có: $\begin{cases} a \ge b \\ a \ge -b \end{cases} \Leftrightarrow a \ge |b|$.

Tính chất 4. Ta có: $|a \pm b| \le |a| + |b|$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Ví dụ 1: *Chứng minh rằng với mọi số thực* a, b *ta luôn có:*

$$|a \pm b| \ge |a| - |b|.$$

Giải

Ta có: $|a| = |(a \pm b) \mp b| \le |a \pm b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \le |a \pm b|$.

Ví dụ 2: *Chứng minh rằng với mọi số thực* a, b, c *ta luôn có:*

$$|a - c| \le |a - b| + |b - c|.$$

Giải

Ta có: $a - c = (a - b) + (b - c)$. Kết quả suy ra từ tính chất 4.

Ví dụ 3: *Chứng minh rằng nếu:* $|a| + |b| = a + b$, (1)

thì $a, b \ge 0$.

Giải

Vế trái không âm, vậy vế phải không âm, tức là $a + b \ge 0$.

Suy ra, trong hai số a, b phải có một số không âm, giả sử $a \ge 0$ suy ra

$|a| = a$.

Từ đó (1) có dạng: $|b| = b \Leftrightarrow b \ge 0$.

Vấn đề 2: SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

Với phương trình ta sử dụng các tính chất:

Tính chất 1. Nếu : $|a + b| = |a| + |b| \Leftrightarrow ab \ge 0$.

Tính chất 2. Nếu: $|a| + |b| = a + b \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge 0 \\ b \ge 0 \end{cases}$.

Tính chất 3. Nếu: $|a| + |b| = a - b \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge 0 \\ b \le 0 \end{cases}$.

Tính chất 4. Nếu: $|a - b| = |a| - |b| \Leftrightarrow b(a - b) \ge 0$.

Ví dụ 1: *Giải phương trình*: $|2x + 3| + |1 - 2x| = 4$.

✍ *Giải*

Ta biến đổi phương trình về dạng:

$$|2x + 3| + |1 - 2x| = (2x + 3) + (1 - 2x).$$

$$\xleftrightarrow{\text{Tính chất 1}} \begin{cases} 2x + 3 \ge 0 \\ 1 - 2x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\dfrac{3}{2} \\ x \le \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy, nghiệm của phương trình là $-\dfrac{3}{2} \le x \le \dfrac{1}{2}$.

☞ ***Chú ý***: Các phương trình được giải bằng phương pháp *sử dụng các tính chất giá trị tuyệt đối* ở dạng ban đầu thường không thấy xuất hiện dấu trị tuyệt đối, nó thường xuất hiện sau phép biến đổi $\sqrt{A^2} = |A|$.

Ví dụ 2: *Giải phương trình*: $\sqrt{x^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 - 2x + 1} = 2$. (1)

✍ *Giải*

Ta biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt{(x+1)^2} - \sqrt{(x-1)^2} = 2 \Leftrightarrow |x + 1| - |x - 1| = |(x + 1) - (x - 1)|$$

$$\xleftrightarrow{\text{Tính chất 4}} (x - 1).[(x + 1) - (x - 1)] \ge 0 \Leftrightarrow (x - 1).2 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 1.$$

Vậy, phương trình có nghiệm là $x \ge 1$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1: Biết rằng $|a| > 2|b|$. Chứng minh rằng $|a| < 2|a - b|$.

Bài 2: Biết với a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

a. $\left|\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a} - \dfrac{a}{c} - \dfrac{c}{b} - \dfrac{b}{a}\right| < 1$.

b. $\left|\dfrac{a-b}{a+b} + \dfrac{b-c}{b+c} + \dfrac{c-a}{c+a}\right| < \dfrac{1}{8}$.

Bài 3: Giải các phương trình sau:

a. $|x + 3| + |1 - x| = 4$.

b. $|3x - 1| + |2 - 3x| = 3$.

c. $|2x - 3| + |2x - 9| = 6$.

d. $|4x - 1| + 2|2x - 1| = 1$.

BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Bất đẳng thức Côsi: Cho hai số không âm a, b, ta luôn có: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b.

Mở rộng

a. Với các số a, b, c không âm, ta luôn có: $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$,

dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b = c.

b. Với n số a_i, $i = \overline{1,n}$ không âm, ta luôn có:

$$\frac{1}{n}(\underbrace{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}_{n \text{ số hạng}}) \geq \sqrt[n]{\underbrace{a_1.a_2\ldots.a_n}_{n \text{ số hạng}}}.$$

dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: **CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC**

Ví dụ 1: *Cho* a, b > 0. *Chứng minh rằng*: $(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}) \geq 4$.

✍ *Giải*

Sử dụng bất đẳng thức Côsi:

- Cho cặp số a, b, ta được: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$. (1)
- Cho cặp số $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, ta được: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq \frac{2}{\sqrt{ab}}$. (2)

Nhân hai vế tương ứng của (1), (2), ta được:

$$(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}) \geq 2\sqrt{ab}.\frac{2}{\sqrt{ab}} = 4, \text{ đpcm.}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi: $\begin{cases} a = b \\ \frac{1}{a} = \frac{1}{b} \end{cases} \Leftrightarrow a = b$.

☛ ***Nhận xét***: Chúng ta có được kết quả tổng quát hơn như sau:

Cho n số dương a_i, $i = \overline{1,n}$. Chứng minh rằng:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}) \geq n^2.$$

Thật vậy, ta có: $a_1 + a_2 + ... + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$,

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}}.$$

Nhân hai vế tương ứng, ta được bất đẳng thức cần chứng minh và dấu đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Ví dụ 2: *Cho ba số dương* a, b, c. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

✍ *Giải*

Ta có:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$$

$$= (\frac{a}{b+c} + 1) + (\frac{b}{c+a} + 1) + (\frac{c}{a+b} + 1) - 3$$

$$= (a+b+c)(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}) - 3$$

$$= \frac{1}{2}[(a+b) + (b+c) + (c+a)][\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}] - 3$$

$$\geq \frac{1}{2}.3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}.3\frac{1}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}} - 3$$

$$= \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}$$

dấu đẳng thức xảy ra khi: $\begin{cases} a+b = b+c = c+a \\ \dfrac{1}{a+b} = \dfrac{1}{b+c} = \dfrac{1}{c+a} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c.$

☛ ***Chú ý***: Trong nhiều trường hợp ta cần sử dụng một vài phép biến đổi đại số để nhận được các phần tử không âm trong bất đẳng thức, từ đó mới có thể sử dụng bất đẳng thức Côsi. Để minh hoạ ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 3: *Cho* a, b, c *là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:*

$$ab(a+b-2c) + bc(b+c-2a) + ca(c+a-2b) \geq 0.$$

✍ *Giải*

Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\frac{a+b-2c}{c}+\frac{b+c-2a}{a}+\frac{c+a-2b}{b}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}\ge 6. \qquad (*)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho VT, ta được:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}\ge 6.\sqrt[6]{\frac{a}{c}.\frac{b}{c}.\frac{b}{a}.\frac{c}{a}.\frac{c}{b}.\frac{a}{b}} = 6, \text{ đpcm.}$$

dấu bằng xảy ra khi:

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{c}=\frac{b}{a}=\frac{c}{a}=\frac{c}{b}=\frac{a}{b}\Leftrightarrow a=b=c.$$

☞ ***Chú ý***: Trong nhiều trường hợp ta cần sử dụng liên tiếp nhiều lần bất đẳng thức Côsi. Để minh hoạ ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 4: *Cho* a, b > 0, $m\in N^*$. *Chứng minh rằng*: $\left(1+\frac{a}{b}\right)^m+\left(1+\frac{b}{a}\right)^m\ge 2^{m+1}$.

✍ *Giải*

Ta có: $1+\frac{a}{b}\ge 2\sqrt{\frac{a}{b}}\Leftrightarrow \left(1+\frac{a}{b}\right)^m\ge 2^m\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^m}$,

$1+\frac{b}{a}\ge 2\sqrt{\frac{b}{a}}\Leftrightarrow \left(1+\frac{b}{a}\right)^m\ge 2^m\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^m}$,

suy ra: $\left(1+\frac{a}{b}\right)^m+\left(1+\frac{b}{a}\right)^m\ge 2^m\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^m}+2^m\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^m}$

$$\ge 2.\sqrt{2^m.\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^m}.2^m.\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^m}} = 2^{m+1},$$

dấu đẳng thức xảy ra khi: $\begin{cases}1=\frac{a}{b}\\ 1=\frac{b}{a}\\ \left(1+\frac{a}{b}\right)^m=\left(1+\frac{b}{a}\right)^m\end{cases}\Leftrightarrow a=b.$

Vấn đề 2: TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT

Ví dụ 1: *Cho hai số* a, b ≥ 0.

a. *Nếu* a + b = k – const, *tính giá trị lớn nhất của* ab.

b. *Nếu* ab = k – const, *tính giá trị nhỏ nhất của* a + b.

✍ *Giải*

a. Theo bất đẳng thức Côsi ta có: $a + b \ge 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{k^2}{4}$,

từ đó suy ra $(ab)_{Max} = \frac{k^2}{4}$, đạt được khi $a = b = \frac{k}{2}$.

☛ ***Nhận xét***: Qua ví dụ trên chúng ta thấy rằng:

1. Trong số các hình chữ nhật có cùng chu vi thì hình vuông là hình có diện tích lớn nhất.
2. Trong số các hình chữ nhật có cùng diện tích thì hình vuông là hình có chu vi nhỏ nhất.
3. Theo bất đẳng thức Côsi ta có: $a + b \ge 2\sqrt{ab} = 2\sqrt{k}$,

từ đó suy ra $(a + b)_{Min} = 2\sqrt{k}$, đạt được khi $a = b = \frac{k}{2}$.

Ví dụ 2: *Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số*: $y = \frac{x}{3} + \frac{15}{x}$, *với* x > 0.

✍ *Giải*

Với x > 0, ta được $\frac{x}{3}, \frac{15}{x} > 0$.

Sử dụng bất đẳng thức Côsi ta được: $y = \frac{x}{3} + \frac{12}{x} \ge 2.\sqrt{\frac{x}{3}.\frac{12}{x}} = 4$,

từ đó suy ra $y_{Min} = 4$, đạt được khi $\frac{x}{3} = \frac{12}{x} \Leftrightarrow x^2 = 36 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x = 6$.

☛ ***Chú ý***: Ví dụ trên đã minh hoạ phương pháp sử dụng bất đẳng thức Côsi để tìm giá trị nhỏ nhất của một tổng có tích bằng hằng số, tuy nhiên trong hầu hết các trường hợp các em học sinh cần có được thủ thuật để tạo ra một tích bằng hằng số, ví dụ như:

1. Với $y = 2x + \frac{1}{x^2}$, với x > 0, ta cần viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = x + x + \frac{1}{x^2} \ge 3\sqrt[3]{x.x.\frac{1}{x^2}} = 3.$$

2. Trong trường hợp là tổng luỹ thừa, ta minh hoạ bằng ví dụ sau:

Ví dụ 3: *Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số* $y = x^3 + \dfrac{3}{x^2}$, *với* $x > 0$.

Giải

Biến đổi:

$$y = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \geq 5\sqrt[5]{\frac{1}{2}x^3.\frac{1}{2}x^3.\frac{1}{x^2}.\frac{1}{x^2}.\frac{1}{x^2}} = \frac{5}{\sqrt[5]{4}},$$

từ đó, suy ra $y_{Min} = \dfrac{5}{\sqrt[5]{4}}$, đạt được khi

$$\frac{1}{2}x^3 = \frac{1}{2}x^3 = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^5 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{2}.$$

Ví dụ 4: *Tìm giá trị lớn nhất của hàm số*: $y = (x + 2)(3 - x)$, *với* $-2 \leq x \leq 3$.

Giải

Với $-2 \leq x \leq 3$, ta được $x + 2 \geq 0$ và $3 - x \geq 0$,

do đó sử dụng bất đẳng thức Côsi ta được:

$$y = (x + 2)(3 - x) \leq \left[\frac{(x+2)+(3-x)}{2}\right]^2 = \frac{25}{4},$$

từ đó suy ra $y_{Max} = \dfrac{25}{4}$, đạt được khi: $x + 2 = 3 - x \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

Chú ý: Ví dụ trên đã minh hoạ phương pháp sử dụng bất đẳng thức Côsi để tìm giá trị lớn nhất của một tích có tổng bằng hằng số, tuy nhiên trong hầu hết các trường hợp các em học sinh cần có được thủ thuật để tạo ra một tổng bằng hằng số, ví dụ như:

1. Với $y = (2x + 1)(2 - 3x)$, vói $-\dfrac{1}{2} \leq x \leq \dfrac{2}{3}$, ta cần viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = (2x + 1)(2 - 3x) = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}).\frac{1}{3}(\frac{2}{3} - x) = \frac{1}{6}(x + \frac{1}{2})(\frac{2}{3} - x)$$

$$\leq \frac{1}{6}\left[\frac{(x+\frac{1}{2})+(\frac{2}{3}-x)}{2}\right]^2 = \frac{1}{6}.\left(\frac{5}{12}\right)^2.$$

2. Trong trường hợp là tích luỹ thừa, ta minh hoạ bằng ví dụ sau:

Ví dụ 5: *Tìm giá trị lớn nhất của hàm số:* $y = x(1-x)^3$, với $0 \le x \le 1$.

✍ *Giải*

Biến đổi:

$$y = x(1-x)^3 = \frac{1}{3}.3x(1-x)^3 = \frac{1}{3}.3x(1-x)(1-x)(1-x)$$

rồi áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 4 số không âm gồm 3x và 3 số 1 − x, ta được:

$$y \le \frac{1}{3}.\left[\frac{3x+(1-x)+(1-x)+(1-x)}{4}\right]^4 = \frac{1}{3}.\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{3^3}{4^4},$$

dấu đẳng thức xảy ra khi:

$$3x = 1 - x = 1 - x = 1 - x \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}.$$

Vấn đề 3: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

Ví dụ 1: *Giải phương trình:* $\frac{3}{|x+1|} + \frac{|x+1|}{3} = 2.$ (1)

✍ *Giải*

Điều kiện $x \ne -1$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta được:

$$VT = \frac{3}{|x+1|} + \frac{|x+1|}{3} \ge 2.\sqrt{\frac{3}{|x+1|}.\frac{|x+1|}{3}} = 2 = VP.$$

Vậy phương trình tương đương với :

$$\frac{3}{|x+1|} = \frac{|x+1|}{3} \Leftrightarrow 9 = (x+1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=3 \\ x+1=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-4 \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có 2 nghiệm x = 2 và x = − 4.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1: *Chứng tỏ rằng trong mọi tam giác, ta đều có:

$$S \le \frac{p^2}{3\sqrt{3}}.$$

trong đó S là diện tích tam giác, 2p là chu vi tam giác.

Bài 2: *Chứng minh rằng:

$$4\sqrt[4]{(a+1)(b+4)(c-2)(d-3)} \le a+b+c+d, \text{ với } a \ge -1,\ b \ge -4,\ c \ge 2 \text{ và } d > 3$$

Bài 3: *Chứng minh rằng:

$$x^2 + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \ge 2(\sqrt{x} + \sqrt{y}), \text{ với } x, y > 0.$$

Bài 4: *Chứng minh rằng: $a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1}\ ) \le ab$, với $a, b \ge 1$.

Bài 5: *Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{a+c+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \le 1, \text{ với } 0 \le a, b, c \le 1.$$

Bài 6: *Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} \le \frac{3}{2} \le \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z}, \text{với } x, y, z \ge 0 \text{ và } x, y, z \le 3.$$

Bài 7: *Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b^5} + \frac{b^2}{c^5} + \frac{c^2}{d^5} + \frac{d^2}{a^5} \ge \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3}, \text{ với } a, b, c, d > 0.$$

Bài 8: *Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+bc} + \frac{1}{b^2+ac} + \frac{1}{c^2+ab} \le \frac{a+b+c}{2abc}, \text{ với } a, b, c > 0.$$

Bài 9: *Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{a^3+c^3+abc} \le \frac{1}{abc}, \text{ với } a, b, c > 0.$$

Bài 10: *Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > \frac{18}{xyz+2}, \text{ với } x, y, z > 0 \text{ có } x+y+z = 1.$$

Bài 11:

a. Trong các hình chữ nhật có chu vi bằng 4, hãy chỉ ra hình có diện tích lớn nhất.

b. Trong các hình chữ nhật có diện tích bằng 3, hãy chỉ ra hình có chu vi nhỏ nhất.

Bài 12: *Tìm giá trị lớn nhất của hàm số: $y = (x+3)(7-x)$, với $-3 \le x \le 7$.

Bài 13: *Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \frac{x}{2} + \frac{18}{x}$, với $x > 0$.

Bài 14: *Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = x^2 + \frac{2}{x^3}$, với $x > 0$.

Bài 15: *Tìm giá trị lớn nhất của hàm số: $y = x^3(2-x)^5$, với $0 \le x \le 2$.

Bài 16: Giả sử phương trình: $x^5 - x^3 + x - 2 = 0$ có nghiệm thực x_0.

Chứng minh rằng $\sqrt[6]{3} < x_0 < \sqrt[6]{4}$.

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1: Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác, thế thì $a + b + c = 2p$ và nhớ rằng $p - a$, $p - b$, $p - c$ là ba số dương.

Theo công thức Hêrông

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) \le p.\left(\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\right)^3 = \frac{p^4}{27} \Leftrightarrow S \le \frac{p^2}{3\sqrt{3}}.$$

dấu đẳng thức xảy ra khi $p - a = p - b = p - c \Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow$ tam giác đều.

Bài 1: $y_{Max} = 25$, đạt được khi $x = 2$.

Bài 2: $y_{Min} = 6$, đạt được khi $x = 6$.

Bài 3: $y_{Min} = \dfrac{5}{\sqrt[5]{27}}$, đạt được khi $x = \sqrt[5]{3}$.

Bài 4: $y_{Max} = \dfrac{3^3.5^5}{4^8}$, đạt được khi $x = \dfrac{3}{4}$.

Bài 16. Vì x_0 là nghiệm của phương trình đã cho nên:

$x_0 \neq 0$, $x \neq 1$ và $x_0^5 - x_0^3 + x_0 = 2$. (*)

Nhân cả hai vế của (*) với $x_0 + \dfrac{1}{x_0}$, ta được: $x_0^6 + 1 = 2\left(x_0 + \dfrac{1}{x_0}\right)$.

Vì vế trái luôn dương, cho nên từ vế phải có $x_0 > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi có: $x_0^6 + 1 = 2\left(x_0 + \dfrac{1}{x_0}\right) \ge 4$.

Lưu ý rằng $x_0 \neq 1$ nên có bất đẳng thức thật sự.

Do đó, $x_0^6 > 3$ và vì $x_0 > 0$, ta có $x_0 > x_0^6$

Chia hai vế của (*) cho x_0^3 dẫn đến: $\dfrac{2}{x_0^3} + 1 = x_0^2 + \dfrac{1}{x_0^2} > 2$ và do đó $x_0 < \sqrt[6]{4}$

Tóm lại, ta được $\sqrt[6]{3} < x_0 < \sqrt[6]{4}$.

☛ ***Nhận xét***: Đây là một bài toán bậc cao, không có công thức nghiệm tổng quát. Tuy nhiên phương trình cụ thể trong bài có thể phân tích thành thừa số: $(x^2 - x + 1)(x^3 + x^2 - x - 2) = 0$

và hạ bậc của phương trình được.

BẤT ĐẲNG THỨC BUNHIACÔPXKI

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Bất đẳng thức Bunhiacôpxki: Cho a_1, a_2, b_1, b_2 là những số thực, ta có:

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \le (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2),$$

dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$.

Mở rộng: Với các số thực $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$, ta luôn có:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2),$$

dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Ví dụ 1: *Chứng minh rằng với mọi số thực* x, y *luôn có*:

$$(x^3 + y^3)^2 \le (x^2 + y^2)(x^4 + y^4).$$

Giải

Ta có:

$$VT = (x^3 + y^3)^2 = (x.x^2 + y.y^2)^2 \le (x^2 + y^2)(x^4 + y^4), \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 2: *Chứng minh rằng với* a, b, c *tuỳ ý, ta luôn có*:

$$ab + bc + ca \le a^2 + b^2 + c^2.$$

Giải

Ta có:

$$VT^2 = (ab + bc + ca)^2 \le (a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + a^2) = (a^2 + b^2 + c^2)^2.$$

Lấy căn bậc hai của hai vế, ta đi đến:

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge |ab + bc + ca| \ge ab + bc + ca, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 3: *Cho* a, b, c *là độ dài ba cạnh của một tam giác*, p *là một nửa chu vi. Chứng minh rằng*:

$$\sqrt{p} < \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} \le \sqrt{3p}.$$

Giải

- Ta có:

$$(\sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c})^2$$

$$= (1.\sqrt{p-a} + 1.\sqrt{p-b} + 1.\sqrt{p-c})^2$$

$$\le (1^2 + 1^2 + 1^2)(p - a + p - b + p - c) = 3p$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} \le \sqrt{3p} \quad (1)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi

$$\frac{\sqrt{p-a}}{1} = \frac{\sqrt{p-b}}{1} = \frac{\sqrt{p-c}}{1} \Leftrightarrow a = b = c.$$

- Ta đi chứng minh

$$\sqrt{p} < \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c}$$

bằng phép biến đổi tương đương, cụ thể:

$$\sqrt{p} < \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c}$$

$$\Leftrightarrow p < p - a + p - b + p - c + $$
$$+ 2\sqrt{(p-a)(p-b)} + 2\sqrt{(p-c)(p-a)} + 2\sqrt{(p-b)(p-c)}$$

$$\Leftrightarrow 0 < 2\sqrt{(p-a)(p-b)} + 2\sqrt{(p-c)(p-a)} + 2\sqrt{(p-b)(p-c)}.$$

Ví dụ 4: *Cho* a, b, c *là ba số khác* 0. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}.$$

✍ *Giải*

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki ta có:

$$\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}\right)(1^2 + 1^2 + 1^2) \geq \left(\left|\frac{a}{b}\right| + \left|\frac{b}{c}\right| + \left|\frac{c}{a}\right|\right)^2.$$

Suy ra:

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \left(\left|\frac{a}{b}\right| + \left|\frac{b}{c}\right| + \left|\frac{c}{a}\right|\right).\frac{1}{3}.\left(\left|\frac{a}{b}\right| + \left|\frac{b}{c}\right| + \left|\frac{c}{a}\right|\right). \qquad (*)$$

Nhận xét rằng:

$$\frac{1}{3}.\left(\left|\frac{a}{b}\right| + \left|\frac{b}{c}\right| + \left|\frac{c}{a}\right|\right) \geq \sqrt[3]{\frac{|abc|}{|abc|}} = 1,$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| + \left|\frac{b}{c}\right| + \left|\frac{c}{a}\right| \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a},$$

suy ra

$$\left(\left|\frac{a}{b}\right| + \left|\frac{b}{c}\right| + \left|\frac{c}{a}\right|\right).\frac{1}{3}.\left(\left|\frac{a}{b}\right| + \left|\frac{b}{c}\right| + \left|\frac{c}{a}\right|\right) \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$$

từ đó (*) được biến đổi:

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}.$$

Dễ nhận thấy dấu đẳng thức xảy ra khi a = b = c.

☞ ***Chú ý***: Với các bài toán có điều kiện ta cần khéo léo biến đổi để nhận được biểu thức điều kiện hoặc sử dụng ngay biểu thức điều kiện để biến đổi. Cụ thể ta đi xem xét các ví dụ sau:

Ví dụ 5: *Hai số* x, y *thoả mãn* $x^2 + y^2 = 1$. *Chứng minh rằng* $-5 \le 3x + 4y \le 5$.

✍ *Giải*

Ta có: $(3x + 4y)^2 \le (3^2 + 4^2)(x^2 + y^2) = 25$.

Lấy căn hai vế, ta được: $|3x + 4y| \le 5 \Leftrightarrow -5 \le 3x + 4y \le 5$, đpcm.

Ví dụ 6: *Cho các số không âm* x, y *thoả mãn* $x^3 + y^3 = 2$. *Chứng minh rằng:*

$$x^2 + y^2 \le 2.$$

✍ *Giải*

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki ta có:

$$(x^2 + y^2)^2 = (\sqrt{x}.\sqrt{x^3} + \sqrt{y}.\sqrt{y^3})^2 \le (x + y)(x^3 + y^3) = 2(x + y)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2)^4 \le 4(x + y)^2 = 4(1.x + 1.y)^2 \le 4(1 + 1)(x^2 + y^2) = 8(x^2 + y^2)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2)^3 \le 8 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \le 2, \text{ đpcm.}$$

Dễ nhận thấy dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y = 1$.

Vấn đề 2: TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT

Ví dụ 1: *Trong tất cả các nghiệm* (x, y) *của phương trình*: $2x + 3y = 1$ (*) *hãy chỉ ra nghiệm có tổng* $3x^2 + 2y^2$ *nhỏ nhất.*

✍ *Giải*

Ta có:

$$1 = (2x + 3y)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}.x\sqrt{3} + \frac{3}{\sqrt{2}}.y\sqrt{2}\right)^2$$

$$\le \left(\frac{4}{3} + \frac{9}{2}\right)(3x^2 + 2y^2) = \frac{35}{6}(3x^2 + 2y^2)$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 2y^2 \ge \frac{6}{35}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi ta có:

$$x\sqrt{3} : \frac{2}{\sqrt{3}} = y\sqrt{2} : \frac{3}{\sqrt{2}} \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ \dfrac{3x}{2} = \dfrac{2y}{3} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{4}{35} \ \& \ y = \frac{9}{35}.$$

Vậy, ta có $(3x^2 + 2y^2)_{Min} = \dfrac{6}{35}$ đạt được khi $x = \dfrac{4}{35}$ và $y = \dfrac{9}{35}$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1: Chứng minh rằng nếu $x^2 + y^2 = 1$, thì $-\sqrt{2} \le x + y \le \sqrt{2}$.

Bài 2: Chứng minh rằng nếu $x + 3y = 2$, thì $x^2 + y^2 \ge \dfrac{5}{2}$.

Bài 3: Chứng minh rằng nếu $2x + 3y = 7$, thì $2x^2 + 3y^2 \ge \dfrac{49}{5}$.

Bài 4: Cho a, b, c, p, q là 5 số dương tuỳ ý. Chứng minh:

$$\frac{a}{pb+qc}+\frac{b}{pc+qa}+\frac{c}{pa+qb}\ge\frac{3}{p+q}.$$

Bài 5: Cho a, b, c là ba số dương cho trước, còn x, y, z là ba số dương thay đổi, luôn luôn thoả mãn điều kiện $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=1$.

Hãy tìm giá trị lớn nhất của tổng $S = x + y + z$.

Bài 6: Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=2$. Chứng minh rằng:

a. $|a+b+c-abc|\le 2.$ b. $|a^3+b^3+c^3-3abc|\le 2\sqrt{2}$

Bài 7: *Cho các số thực x, y, z, t thỏa mãn $xyzt = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x^3(yz+zt+ty)}+\frac{1}{y^3(xz+zt+tx)}+$$

$$+\frac{1}{z^3(xt+ty+yz)}+\frac{1}{t^3(xy+yz+zx)}\ge\frac{4}{3}. \quad (1)$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Bài 8: *Chứng minh rằng với mọi $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ và với mọi $x_1, x_2,..., x_n \in \mathbf{R}$ ta có bất đẳng thức sau:

$$\frac{1}{n-1}(x_1+x_2+\dots+x_n)^2\le\left(\frac{a_1^{n+1}}{S-a_1}+\dots+\frac{a_n^{m+1}}{S-a_n}\right)\left(\frac{x_1^2}{a_1^m}+\frac{x_2^2}{a_2^m}+\dots+\frac{x_n^2}{a_n^m}\right)$$

với mọi $m, n \in \mathbf{N}$; $m \ge 2$ và $S = a_1 + a_2 + ...+ a_n$.

Bài 9: *Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{a_1^2}{a_2+a_3+a_4}+\frac{a_2^2}{a_3+a_4+a_5}+\frac{a_3^2}{a_4+a_5+a_1}+\frac{a_4^2}{a_5+a_1+a_2}+\frac{a_5^2}{a_1+a_2+a_3}\ge\frac{\sqrt{5}}{3}$$

trong đó: $a_1, a_2, ..., a_5$ là các số dương thỏa mãn điều kiện:

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2\ge 1.$$

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 4: Ký hiệu bất đẳng thức cần chứng minh là (1)

Để ý rằng:

$$a=\sqrt{\frac{a}{pb+qc}}.\sqrt{a(pb+qc)},$$

$$b=\sqrt{\frac{b}{pc+qa}}.\sqrt{b(pc+qa)},$$

$$c=\sqrt{\frac{c}{pa+qb}}.\sqrt{c(pa+qb)}$$

Gọi S là vế trái của bất đẳng thức (1).

Ta có:

$$(a+b+c)^2 = \left(\sqrt{\frac{a}{pb+qc}}\cdot\sqrt{a(pb+qc)}\right. +$$

$$\left. + \sqrt{\frac{b}{pc+qa}}\cdot\sqrt{b(pc+qa)} + \sqrt{\frac{c}{pa+qb}}\cdot\sqrt{c(pa+qb)}\right)^2$$

$$\le S.[a(pb+qc) + b(pc+qa) + c(pa+qb)]$$

$$= S(p+q)(ab+bc+ca). \qquad (2)$$

Mặt khác: $ab + bc + ca \le \frac{1}{3}(a+b+c)^2$, bởi:

$$3(ab+bc+ca) = (ab+bc+ca) + 2(ab+bc+ca)$$

$$\le a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) = (a+b+c)^2.$$

Với kết quả đó từ (2) ta suy ra:

$$(a+b+c)^2 \le S(p+q).\frac{(a+b+c)^2}{3} \Rightarrow S \ge \frac{3}{p+q}, \text{ vì } a+b+c>0,\ p+q>0.$$

Bài 5 : Ta có $\sqrt{a} = \sqrt{\frac{a}{x}}.\sqrt{x}$.

Vậy ta được:

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2 = \left(\sqrt{\frac{a}{x}}.\sqrt{x} + \sqrt{\frac{b}{y}}\sqrt{y} + \sqrt{\frac{c}{z}}\sqrt{z}\right)^2$$

$$\le \left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)(x+y+z) = S.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi:

$$\sqrt{x}:\sqrt{\frac{a}{x}} = \sqrt{y}:\sqrt{\frac{b}{y}} = \sqrt{z}:\sqrt{\frac{c}{z}} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=1 \\ \frac{x}{\sqrt{a}} = \frac{y}{\sqrt{b}} = \frac{z}{\sqrt{c}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}};\ y = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}};\ z = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$$

Vậy, ta được $\text{Min}(x+y+z) = (\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2$.

Bài 6:

a. Ta có:

$$2 = a^2+b^2+c^2 \ge a^2 + 2bc \ge 2bc \Rightarrow bc \le 1.$$

Do đó:

$$(a+b+c-abc)^2 = [a(1-bc)+(b+c)]^2$$

$$\le [a^2+(b+c)^2][(1+(1-bc)^2] = 2(1+bc)[1+(1-bc)]^2$$

$$= 2(1+bc) + 2(1-bc)(1-b^2c^2)$$

$$= 4 - 2b^2c^2(1-bc) \le 4.$$

$$\Leftrightarrow |a+b+c-abc| \le 2.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi trong 3 số a, b, c có một số bằng 0, hai số còn lại bằng nhau và bằng 1 hay – 1.

b. Ta có:

$$(a + b + c)^2 \le 3(a^2 + b^2 + c^2) = 6 \Rightarrow \frac{1}{2}(a + b + c)^2 \le 3.$$

Do đó:

$$(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)^2 = [(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)]^2$$

$$= (a + b + c)^2\left[2 - \frac{(a+b+c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2}\right]^2$$

$$= (a + b + c)^2\left[3 - \frac{1}{2}(a+b+c)^2\right]^2$$

$$= (a + b + c)^2\left[3 - \frac{1}{2}(a+b+c)^2\right] \times \left[3 - \frac{1}{2}(a+b+c)^2\right] \le \left(\frac{6}{3}\right)^3 = 8.$$

$$\Leftrightarrow \left|a^3 + b^3 + c^3 - 3abc\right| \le 2\sqrt{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} |a + b + c| = \sqrt{2} \\ a^2 + b^2 + c^2 = 2 \end{cases}.$$

Bài 7: Đặt $a = \frac{1}{x}$; $b = \frac{1}{y}$; $c = \frac{1}{z}$; $d = \frac{1}{t}$

Suy ra:

$$(1) \Leftrightarrow S = \frac{a^2}{b+c+d} + \frac{b^2}{c+d+a} + \frac{c^2}{d+a+b} + \frac{d^2}{a+b+c} \ge \frac{4}{3}$$

với abcd = 1 và a, b, c, d là các số dương.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki, ta có:

$$S[(b + c + d) + (c + d + a) + (d + a + b) + (a + b + c)] \ge (a + b + c + d)^2$$

$$\Rightarrow S \ge \frac{(a+b+c+d)^2}{3(a+b+c+d)} = \frac{1}{3}(a + b + c + d). \qquad (2)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\frac{1}{4}(a + b + c + d) \ge \sqrt[4]{abcd} = 1 \Rightarrow \frac{1}{3}(a + b + c + d) \ge \frac{4}{3}. \qquad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra: $S \ge \frac{4}{3}$ (đpcm)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = 1 \Leftrightarrow x = y = z = t = 1$.

☛ ***Nhận xét***: Ta có thể sử dụng bất đẳng thức côsi cho hai số dương, chẳng hạn:

$$\frac{a^2}{b+c+d} + \frac{b+c+d}{9} \ge \frac{2a}{3}$$

Cùng với ba bất đẳng thức tương tự nữa sẽ suy ra (2).

Bài 8: Không mất tổng quát, giả sử $a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_n$.

Khi đó, do $a_i > 0\ \forall\ i = \overline{1,n}$ và $m \in \mathbf{N}$, ta có:

$$a_1^m \ge a_2^m \ge \ldots \ge a_n^m. \qquad (1)$$

$$\frac{a_1}{S-a_1} \ge \frac{a_2}{S-a_2} \ge \ldots \ge \frac{a_n}{S-a_n}. \qquad (2)$$

$$a_1^m + a_2^m + \ldots + a_n^m\left(\frac{a_1}{S-a_1} + \ldots + \frac{a_n}{S-a_n}\right) \le n\left(\frac{a_1^{m+1}}{S-a_1} + \ldots + \frac{a_n^{m+1}}{S-a_n}\right) \qquad (3)$$

Mặt khác, ta có:

$$\frac{a_1}{S-a_1} + \ldots + \frac{a_n}{S-a_n} = \left(\frac{S}{S-a_1} - 1\right) + \ldots + \left(\frac{S}{S-a_n} - 1\right)$$

$$= S\left(\frac{1}{S-a_1} + \ldots + \frac{1}{S-a_n}\right) - n$$

$$= \frac{1}{n-1}[(S-a_1) + \ldots + (S-a_n)] \times \left(\frac{1}{S-a_1}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{S-a_n}\right) - n$$

$$\ge \frac{n^2}{n-1} - n = \frac{n}{n-1}.$$

Khi đó, từ (3) ta có:

$$\frac{1}{n-1}(a_1^m + a_2^m + \ldots + a_n^m) \le \frac{a_1^{m+1}}{S-a_1} + \frac{a_2^{m+1}}{S-a_2} + \ldots + \frac{a_n^{m+1}}{S-a_n} \qquad (4)$$

Áp dụng bất đẳng thứ Bunhiacopxki cho hai bộ số:

$$\left(\frac{x_1}{\sqrt{a_1^m}}, \frac{x_2}{\sqrt{a_2^m}}, \ldots, \frac{x_n}{\sqrt{a_n^m}}\right) \text{ và } \left(\sqrt{a_1^m}\sqrt{a_2^m}, \ldots, \sqrt{a_n^m}\right)$$

ta được: $\left(\frac{x_1^2}{a_1^m} + \frac{x_2^2}{a_2^m} + \ldots + \frac{x_n^2}{a_n^m}\right)(a_1^m + a_2^m + \ldots + a_n^m) \ge (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2$

$$\Rightarrow \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2}{a_1^m + a_2^m + \ldots + a_n^m} \le \frac{x_1^2}{a_1^m} + \frac{x_2^2}{a_2^m} + \ldots + \frac{x_n^2}{a_n^m}. \qquad (5)$$

Do các vế của (4) và (5) đều là các số dương nên nhân vế theo vế hai bất đẳng thức cùng chiều (4) và (5) ta được:

$$\frac{1}{(n-1)}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 \le \left(\frac{a_1^{m+1}}{S-a_1} + \ldots + \frac{a_n^{m+1}}{S-a_n}\right)\left(\frac{x_1^2}{a_1^m} + \frac{x_2^2}{a_2^m} + \ldots + \frac{x_n^2}{a_n^m}\right)$$

Dấu "=" ở bất đẳng thức trên xảy ra

$\Leftrightarrow$ dấu "=" xảy ra đồng thời ở (4) và (5)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 = \ldots = a_n \\ x_1 = x_2 = \ldots = x_n \end{cases}.$$

Bài 9: Đặt:

$$A = \frac{a_1^2}{a_2+a_3+a_4} + \frac{a_2^2}{a_3+a_4+a_5} + \frac{a_3^2}{a_4+a_5+a_1} + \frac{a_4^2}{a_5+a_1+a_2} + \frac{a_5^2}{a_1+a_2+a_3}$$

$$B = a_1^2(a_2+a_3+a_4) + a_2^2(a_3+a_4+a_5) + a_3^2(a_4+a_5+a_1) + a_4^2(a_5+a_1+a_2) + a_5^2(a_1+a_2+a_3);$$

$$C = a_1^2(a_2+a_3+a_4)^2 + a_2^2(a_3+a_4+a_5)^2 + a_3^2(a_4+a_5+a_1)^2 + a_4^2(a_5+a_1+a_2)^2 + a_5^2(a_1+a_2+a_3)^2$$

$$D = 3[a_1^2(a_2+a_3+a_4) + a_2^2(a_3+a_4+a_5) + a_3^2(a_4+a_5+a_1) + a_4^2(a_5+a_1+a_2) + a_5^2(a_1+a_2+a_3)];$$

$$E = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2$$

Do:

$$3(x^2+y^2+z^2) \geq (x+y+z)^2 \text{ đúng với } \forall x, y, z \in \mathbf{R}$$

nên

$$D \geq C \qquad (1)$$

Bằng biến đổi đơn giản, ta có:

$$\frac{5}{9}E^2 - D = \frac{3}{10}[(a_1^2+a_2^2-a_3^2-a_4^2)^2 + (a_2^2+a_3^2-a_4^2-a_5^2)^2 + (a_3^2+a_4^2-a_5^2-a_1^2)^2 + (a_4^2+a_5^2-a_1^2-a_2^2)^2 + (a_5^2+a_1^2-a_2^2-a_3^2)^2 + (a_1^2-a_4^2)^2 + (a_1^2-a_3^2)^2 + (a_2^2-a_4^2)^2 + (a_2^2-a_5^2)^2 + (a_3^2-a_4^2)^2] \geq 0$$

Nên $\frac{5}{9}E^2 \geq 0$. (2)

Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki, ta thu được: $A.B \geq E^2$ (3)

Vận dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki, ta thu được: $B^2 \leq EC$.

Từ (1) và (2), ta có: $B^2 \leq EC \leq ED \leq E.\frac{5}{9}E^2 = \frac{5}{9}E^3$, (4)

Từ (3) và (4), ta thu được: $A \geq \frac{\sqrt{5}}{3}\sqrt{E} \geq \frac{\sqrt{5}}{3}$, do $E \geq 1$.

Đẳng thức chỉ xảy ra khi: $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

PHẦN HÌNH HỌC

CHƯƠNG III – TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

CHỦ ĐỀ 1

ĐỊNH LÍ TA–LÉT TRONG TAM GIÁC

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. TỈ SỐ CỦA HAI ĐOẠN THẲNG

Định nghĩa: Tỉ số của hai đoạn thẳng là tỉ số độ dài của chúng theo cùng một đơn vị đo.

☞ ***Chú ý***: Tỉ số của hai đoạn thẳng không phụ thuộc vào cách chọn đơn vị đo.

2. ĐOẠN THẲNG TỈ LỆ

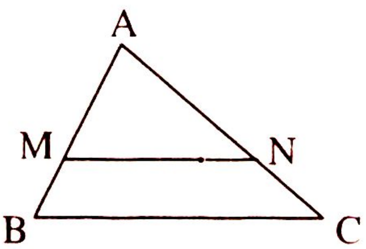
Định nghĩa: Hai đoạn thẳng AB và CD gọi là tỉ lệ với hai đoạn thẳng A_1B_1 và C_1D_1 nếu có hệ thức: $\frac{AB}{CD} = \frac{A_1B_1}{C_1D_1}$ *hoặc* $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$.

3. ĐỊNH LÍ TA – LÉT TRONG TAM GIÁC

Định lí Ta – lét: Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì nó định ra trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

Như vậy, trong ΔABC nếu MN song song với BC, ta nhận được:

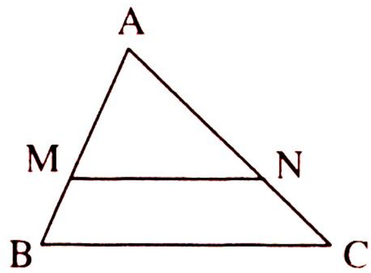
$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC},$$
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC},$$
$$\frac{BM}{AB} = \frac{CN}{AC}.$$



Định lí Ta – lét đảo: Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và định ra trên hai cạnh này những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại của tam giác.

Như vậy, trong ΔABC nếu ta có:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Leftrightarrow MN \,//\, BC,$$
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \Leftrightarrow MN \,//\, BC,$$
$$\frac{BM}{AB} = \frac{CN}{AC} \Leftrightarrow MN \,//\, BC.$$

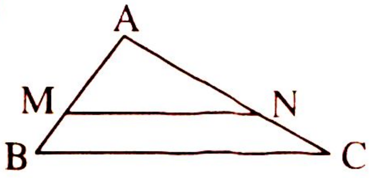


☞ ***Nhận xét***: Theo kết quả của định lí Ta – let đảo, ta có được thêm một cách để chứng minh *hai đường thẳng song song và đường trung bình* của tam giác.

4. HỆ QUẢ CỦA ĐỊNH LÍ TA-LÉT

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới có ba cạnh tương ứng tỉ lệ với ba cạnh của tam giác đã cho.

Như vậy, trong ΔABC nếu MN song song với BC, ta nhận được:



$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

☞ ***Chú ý***: Hệ quả trên vẫn đúng trong trường hợp đường thẳng a song song với một cạnh của tam giác và cắt phần kéo dài của hai cạnh còn lại.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: (Bài 1/tr 58 – Sgk): *Viết tỉ số của các cặp đoạn thẳng có độ dài như sau:*

a. AB = 5cm *và* CD = 15cm. b. EF = 48cm *và* GH = 16dm.

c. PQ = 1,2m *và* MN = 24cm.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

b. Ta có:

$$\frac{EF}{GH} = \frac{48}{160} = \frac{3}{10}.$$

c. Ta có:

$$\frac{PQ}{MN} = \frac{120}{20} = 5.$$

Ví dụ 2: (Bài 3/tr 59 – Sgk): *Cho biết độ dài của* AB *gấp* 5 *lần độ dài của* CD *và độ dài của* A'B' *gấp* 12 *lần độ dài của* CD. *Tính tỉ số của hai đoạn thẳng* AB *và* A'B'.

✍ *Giải*

Ta có: AB = 5CD; A'B' = 12CD.

Suy ra: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{5CD}{12CD} = \frac{5}{12}.$

Ví dụ 3: *Cho đoạn thẳng* AB = 5cm. *Trên đường thẳng* AB *lấy các điểm* C, D *sao cho* $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = \frac{1}{2}$ (C *nằm trong đoạn thẳng* AB, D *nằm ngoài đoạn thẳng* AB). *Tính độ dài các đoạn thẳng* CA, DA.

✍ *Giải*

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:



Cách 1: Ta có:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{CA}{CA + CB} = \frac{1}{1 + 2} \Rightarrow \frac{CA}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{CA}{15} = \frac{1}{3} \Rightarrow CA = 5cm.$$

$$\frac{DA}{DB}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{DA}{DB-DA}=\frac{1}{2-1}\Rightarrow\frac{DA}{AB}=1\Rightarrow\frac{DA}{15}=1\Rightarrow DA=15cm.$$

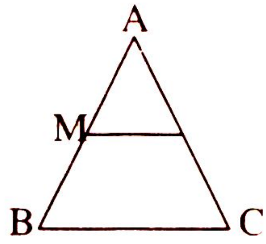
Cách 2: Ta có:

$$\frac{CA}{1}=\frac{CB}{2}=\frac{CA+CB}{1+2}=\frac{AB}{3}=\frac{15}{3}=5\Rightarrow CA=5cm.$$

$$\frac{DA}{1}=\frac{DB}{2}=\frac{DB-DA}{2-1}=\frac{AB}{1}=15\Rightarrow DA=15cm.$$

Ví dụ 4: *Cho* ΔABC, *gọi* M, N *theo thứ tự là trung điểm của* AB, AC. *Hãy tính các tỉ số* $\frac{AM}{AB}$ *và* $\frac{AN}{AC}$.

✍ *Giải*



Với giả thiết:

- M là trung điểm của AB, ta được $\frac{AM}{AB}=\frac{AM}{2AM}=\frac{1}{2}$.
- N là trung điểm của AC, ta được $\frac{AN}{AC}=\frac{AN}{2AN}=\frac{1}{2}$.

Ví dụ 5: (Bài 5/tr 59 – Sgk): *Tính* x *trong các trường hợp hình của sgk.*

✍ *Giải*

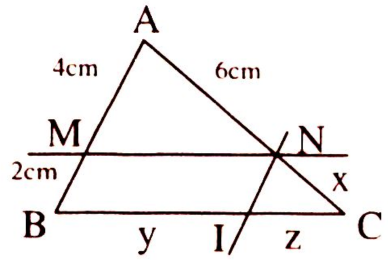
a. Áp dụng định lí Talét vào ΔABC có MN // BC:

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}\Leftrightarrow\frac{x}{4}=\frac{5}{8{,}5-5}\Rightarrow x=2{,}8.$$

b. Áp dụng định lí Talét vào ΔDEF có PQ // EF:

$$\frac{DP}{PE}=\frac{DQ}{QF}\Leftrightarrow\frac{x}{10{,}5}=\frac{9}{24-9}\Rightarrow x=6{,}3.$$

Ví dụ 6: *Tính các độ dài* x, y *và* z *trong hình vẽ, biết* BC = 12cm.



✍ *Giải*

Với MN song song với BC, ta có:

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}\Leftrightarrow\frac{4}{2}=\frac{6}{x}\Leftrightarrow x=3cm.$$

Với NI song song với AB, ta có:

$$\frac{CN}{CA}=\frac{CI}{CB}\Leftrightarrow\frac{3}{9}=\frac{z}{12}\Leftrightarrow z=4cm.$$

Ta có:

$$BC=BI+CI\Leftrightarrow 12=y+4\Leftrightarrow y=8cm.$$

Vậy, ta nhận được x = 3cm, y = 8cm và z = 4cm.

☞ ***Nhận xét***:

1. Trước hết ta có nhận xét: $\frac{BM}{BA} + \frac{BI}{BC} = \frac{2}{6} + \frac{8}{12} = 1$

   từ đó, ta có thể nêu một bài toán:

   " *Cho ΔABC. Từ điểm N trên AC kẻ các đường thẳng song song với các cạnh BC và AB, chúng cắt các cạnh AB và BC theo thứ tự tại M và I. Chứng minh rằng:* $\frac{BM}{BA} + \frac{BI}{BC} = 1$".

2. Kết luận của định lí Ta – let vẫn đúng trong hình thang, cụ thể:

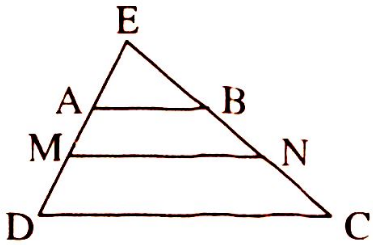
   "*Cho hình thang* ABCD *có* AB // CD *và* AB < CD. *Đường thẳng song song với* AB *cắt các cạnh bên* AD, BC *theo thứ tự tại* M, N.

   Chứng minh rằng:

   a. $\frac{MA}{AD} = \frac{NB}{BC}$.

   b. $\frac{MA}{MD} = \frac{NB}{NC}$.

   c. $\frac{MD}{AD} = \frac{NC}{BC}$ ".



Thật vậy:

a. Kéo dài AD và BC, chúng cắt nhau tại E, khi đó ta lần lượt xét:

$$\frac{MA}{AD} = \frac{MA}{AE}.\frac{AE}{AD} = \frac{NB}{BE}.\frac{BE}{BC} = \frac{NB}{BC}.$$

b. Ta có thể trình bày theo hai cách:

Cách 1: Sử dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{MA}{AD} = \frac{NB}{BC} \Leftrightarrow \frac{MA}{AD - MA} = \frac{NB}{BC - NB} \Leftrightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{NB}{NC}.$$

Cách 2: Sử dụng phép biến đổi như trong câu a), ta có:

$$\frac{MA}{MD} = \frac{MA}{ME}.\frac{ME}{MD} = \frac{NB}{NE}.\frac{NE}{NC} = \frac{NB}{NC}.$$

c. Ta có thể trình bày theo hai cách:

Cách 1: Sử dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

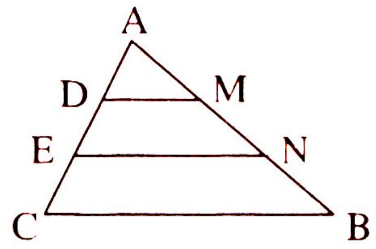
$$\frac{MA}{MD} = \frac{NB}{NC} \Leftrightarrow \frac{MA + MD}{MD} = \frac{NB + NC}{NC} \Leftrightarrow \frac{AD}{MD} = \frac{BC}{NC}.$$

Cách 2: Sử dụng phép biến đổi như trong câu a), ta có:

$$\frac{MD}{AD} = \frac{MD}{DE}.\frac{DE}{AD} = \frac{NC}{CE}.\frac{CE}{BC} = \frac{NC}{BC}.$$

Ví dụ 7: *Cho* ΔABC *có* BC = a. *Lấy các điểm* M, N *trên AB sao cho* AM = MN = NB. *Từ* M, N *kẻ các đường thẳng song song với* BC *cắt cạnh* AC *theo thứ tự tại* D, E. *Tính theo a độ dài các đoạn thẳng* DM *và* EN.

✍ *Giải*



Ta lần lượt có:

$$\frac{DM}{BC} = \frac{AM}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow DM = \frac{a}{3}.$$

$$\frac{EN}{BC} = \frac{AN}{AC} = \frac{2}{3} \Rightarrow EN = \frac{2a}{3}.$$

Ví dụ 8: (Bài 7/tr 62 – Sgk): *Tính độ dài* x, y *trong các hình sgk.*

✍ *Giải*

Trong hình a), xét ΔDEF ta có: MN // EF (gt).

Theo hệ quả của định lí Talét, ta có:

$$\frac{MN}{EF} = \frac{DM}{DE} \Leftrightarrow \frac{8}{x} = \frac{9,5}{9,5+28} \Rightarrow x \approx 31,58.$$

Trong hình b), ta có: A'B' // AB (vì cùng vuông góc với AA')

Theo hệ quả của định lí Talét, ta có: $\frac{OA'}{OA} = \frac{A'B'}{AB} \Leftrightarrow \frac{3}{6} = \frac{4,2}{x} \Rightarrow x = 8,4.$

Áp dụng định lí Pitago vào ΔOAB vuông tại A, ta có:

$$OB^2 = AB^2 + OA^2 \Leftrightarrow y^2 = x^2 + 6^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{(8,4)^2 + 6^2} \approx 10,32.$$

Ví dụ 9: (Bài 9/tr 63 – Sgk): *Cho* ΔABC *và điểm* D *trên cạnh* AB *sao cho* AD = 13,5cm, DB = 4,5cm. *Tính tỉ số các khoảng cách từ các điểm* D *và* B *đến cạnh* AC.

✍ *Giải*

Kẻ BH và DK vuông góc với AC (H, K $\in$ AC) thì BH và DK là khoảng cách từ B và D đến cạnh AC.

Xét ΔABH có DK // BH (vì cùng vuông góc với AC).

Theo hệ quả của định lí Talét, ta có: $\frac{DK}{BH} = \frac{AD}{AB} = \frac{13,5}{13,5+4,5} = \frac{3}{4}.$

Vậy, tỉ số các khoảng cách từ D và B đến cạnh AC là $\frac{DK}{BH} = \frac{3}{4}.$

Ví dụ 10: (Bài 4/tr 59 – Sgk): *Cho biết* $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$. *Chứng minh rằng:*

a. $\frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C}.$ b. $\frac{BB'}{AB} = \frac{CC'}{AC}.$

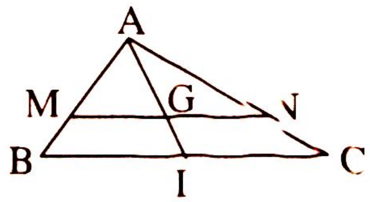
✍ *Giải*

a. Ta có: $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} \Rightarrow \frac{AB'}{AB - AB'} = \frac{AC'}{AC - AC'} \Rightarrow \frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C}$

b. Ta có: $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} \Rightarrow \frac{AB - AB'}{AB} = \frac{AC - AC'}{AC} \Rightarrow \frac{BB'}{AB} = \frac{CC'}{AC}$.

Ví dụ 11: *Cho* ΔABC *có trọng tâm* G. *Lấy các điểm* M, N *theo thứ tự thuộc* AB *và* AC *sao cho* AM = 2MB *và* AN = $\frac{2}{3}$AC. *Chứng minh rằng ba điểm* M, N, G *thẳng hàng.*

✍ *Giải*



Gọi I là trung điểm của BC.

Từ giả thiết về các điểm M, N ta được:

$$\frac{AM}{BM} = 2 \text{ và } \frac{AN}{AC} = \frac{2}{3}.$$

Vì G là trọng tâm ΔABC, suy ra:

$$\frac{AG}{IG} = 2 \Rightarrow \frac{AG}{IG} = \frac{AM}{BM} \Leftrightarrow MG \mathbin{//} BI. \quad (1)$$

$$\frac{AG}{AI} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AG}{AI} = \frac{AN}{AC} \Leftrightarrow NG \mathbin{//} CI. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra ba điểm M, N, G thẳng hàng.

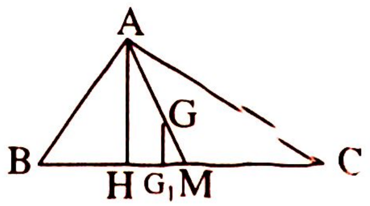
Ví dụ 12: *Cho* ΔABC *có trọng tâm* G. *Chứng minh rằng các tam giác* ΔGBC, ΔGAC, ΔGAB *có diện tích bằng nhau.*

✍ *Giải*

Gọi M là trung điểm BC, đường cao AH, hạ GG_1 vuông góc với BC.

Vì $GG_1 \mathbin{//} AH$ nên:

$$\frac{GG_1}{AH} = \frac{MG}{MA} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow GG_1 = \frac{1}{3}AH.$$



Khi đó, ΔGBC có diện tích được cho bởi:

$$S_{\Delta GBC} = \frac{1}{2}GG_1.BC = \frac{1}{2}.\frac{1}{3}AH.BC$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}AH.BC\right) = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.$$

Chứng minh tương tự, ta cũng nhận được:

$$S_{\Delta GAC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC},\ S_{\Delta GAB} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.$$

Vậy, các tam giác ΔGBC, ΔGAC, ΔGAB có diện tích bằng nhau.

Ví dụ 13: (Bài 59/tr 92 – Sgk): *Hình thang* ABCD (AB // CD) *có* AC *và* BD *cắt nhau tại* O, AD *và* BC *cắt nhau tại* K. *Chứng minh rằng* OK *đi qua trung điểm của các cạnh* AB *và* CD.

Giải

Kẻ tia OK cắt AB tại M và cắt CD tại N, qua O kẻ đường thẳng song song với AB và CD cắt AD tại E và cắt BC tại F.

Xét ΔDAB có: EO // AB $\Rightarrow \dfrac{DE}{DA} = \dfrac{EO}{AB}$ (1)

Xét ΔCAB có: OF // AB $\Rightarrow \dfrac{CF}{CB} = \dfrac{OF}{AB}$ (2)

Xét hình thang ABCD có: EF // AB và EF // CD $\Rightarrow \dfrac{ED}{DA} = \dfrac{CF}{CB}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra: $\dfrac{EO}{AB} = \dfrac{OF}{AB} \Rightarrow OE = OF$ (4)

Xét ΔKEO có: AM // EO $\Rightarrow \dfrac{AM}{EO} = \dfrac{KA}{KE}$ (5)

Xét ΔKEF có: AB // EF $\Rightarrow \dfrac{KA}{KE} = \dfrac{KB}{KF}$ (6)

Xét ΔKFO có: MB // OF $\Rightarrow \dfrac{MB}{OF} = \dfrac{KB}{KF}$ (7)

Từ (5), (6) và (7) suy ra $\dfrac{AM}{OE} = \dfrac{MB}{OF}$.

Vì OE = OF nên AM = MB (8)

Chứng minh tương tự, ta có: CN = DN (9)

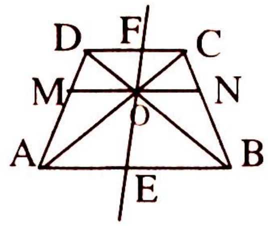
Từ (8) và (9) suy ra tia OK đi qua trung điểm của hai cạnh đáy AB và CD.

Ví dụ 14: *Hình thang* ABCD (AB // CD) *có các đường chéo cắt nhau tại* O. *Qua* O *kẻ đường thẳng song song với* AB, *cắt* AD *và* BC *theo thứ tự tại* M *và* N.

a. *Chứng minh rằng* OM = ON.

b. *Một đường thẳng đi qua* O *cắt hai đáy* AB *và* CD *theo thứ tự tại* E *và* F. *Biết tỉ số* $\dfrac{EA}{EB} = \dfrac{m}{n}$, *hãy tính tỉ số* $\dfrac{FD}{FC}$.

Giải



a. Áp dụng định lí Talet, ta lần lượt xét với:

- Trong ΔADC, vì MO // CD nên: $\dfrac{OM}{CD} = \dfrac{AO}{AC}$. (1)
- Trong ΔABC, vì NO // AB nên: $\dfrac{AO}{AC} = \dfrac{BN}{BC}$. (2)

- Trong ΔBCD, vì NO // CD nên $\frac{BN}{BC} = \frac{ON}{CD}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra: $\frac{OM}{CD} = \frac{ON}{CD} \Rightarrow OM = ON$, đpcm.

b. Trong ΔOFC vì AB // CD nên $\frac{EA}{FC} = \frac{OE}{OF}$. (4)

Trong ΔOFD vì AB // CD nên $\frac{EB}{FD} = \frac{OE}{OF}$. (5)

Từ (4) và (5) suy ra: $\frac{EA}{FC} = \frac{EB}{FD} \Rightarrow \frac{FD}{FC} = \frac{EB}{EA} = \frac{n}{m}$.

☞ ***Nhận xét***:

1. Ta có thể chứng minh OM = ON bằng phương pháp diện tích.
2. Trong ví dụ trên để chứng minh OM = ON ta đi chứng minh $\frac{OM}{CD} = \frac{ON}{CD}$ bằng cách áp dụng định lí Ta–let ba lần, tỉ số $\frac{OM}{CD}$ lần lượt bằng $\frac{AO}{AC}, \frac{BN}{BC}, \frac{ON}{CD}$.
3. Khai thác kết quả của câu b), trong trường hợp m = n thì M là trung điểm của AB, N là trung điểm của CD, ta có định lí:
   "*Trong hình thang, đường thẳng đi qua giao điểm hai đường chéo và trung điểm của một đáy thì đi qua trung điểm của đáy kia*".
   Nói cách khác:
   "*Các trung điểm của hai đáy và giao điểm hai đường chéo hình thang là ba điểm thẳng hàng*".

Ví dụ 15: (Bài 6/tr 62 – Sgk): *Tìm các cặp đường thẳng song song trong hình sgk và giải thích vì sao chúng song song.*

✍ *Giải*

a. Trong hình a) xét ΔABC (M ∈ AC, N ∈ BC, P ∈ AB), ta có:

$$\begin{cases} \frac{CN}{NB} = \frac{21}{7} = 3 \\ \frac{CM}{MA} = \frac{15}{5} = 3 \end{cases} \Rightarrow \frac{CN}{NB} = \frac{CM}{MA}$$

⇒ MN // AB (theo định lí đảo của định lí Talét).

$$\begin{cases} \frac{AP}{PB} = \frac{3}{8} \\ \frac{AM}{MC} = \frac{5}{15} \end{cases} \Rightarrow \frac{AP}{PB} \neq \frac{AM}{MC} \Rightarrow \text{PM không song song với BC.}$$

b. Trong hình b) xét ΔOAB, ta có: $\begin{cases} \dfrac{OA'}{OA} = \dfrac{2}{5} = 0,4 \\ \dfrac{OB'}{OB} = \dfrac{3}{7,5} = 0,4 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{OA'}{OA} = \dfrac{OB'}{OB}$

$\Rightarrow AB \,//\, A'B'$ (theo định lí đảo của định lí Talét). (1)

Lại có:

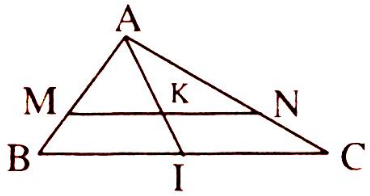
$O\hat{A}'B' = O\hat{A}''B''$ (gt) $\Rightarrow A''B'' = A'B'$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$AB \,//\, A'B' \,//\, A''B''$.

Ví dụ 16: *Trên các cạnh* AB, AC *của* ΔABC, *lần lượt lấy hai điểm* M, *N sao cho* $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$. *Gọi* I *là trung điểm của cạnh* BC, *K là giao điểm của đường thẳng* AI *với đường thẳng* MN. *Chứng minh rằng K là trung điểm của cạnh* MN.

Giải



Trong ΔABC ta có:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow MN \,//\, BC$$

Trong ΔABI vì $MN \,//\, BC$ nên:

$$\frac{MK}{BI} = \frac{AK}{AI}. \quad (1)$$

Trong ΔAIC vì $MN \,//\, BC$ nên:

$$\frac{AK}{AI} = \frac{KN}{IC}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{MK}{BI} = \frac{KN}{IC} \Rightarrow \frac{MK}{KN} = \frac{BI}{IC} = 1.$$

Vậy K là trung điểm của MN.

Nhận xét: Từ kết quả của ví dụ trên ta suy ra:

"*Trong hình thang, đường thẳng đi qua giao điểm của các đường thẳng chứa hai cạnh bên và trung điểm của một đáy thì đi qua trung điểm của đáy kia*".

Nói cách khác "*Giao điểm của các đường thẳng chứa hai cạnh bên và trung điểm của hai đáy là ba điểm thẳng hàng*".

Mở rộng: "*Trong hình thang (có hai đáy không bằng nhau), trung điểm của hai đáy, giao điểm hai đường chéo và giao điểm của các đường thẳng chứa hai cạnh bên là bốn điểm thẳng hàng*".

Tính chất này được gọi là bổ đề hình thang.

Ví dụ 17: (Bài 10/tr 63 – Sgk): ΔABC *có đường cao* AH. *Đường thẳng* d *song song với* BC, *cắt các cạnh* AB, AC *và đường cao* AH *theo thứ tự tại các điểm* B', C' *và* H' (*hình sgk*).

a. *Chứng minh rằng* $\frac{AH'}{AH} = \frac{B'C'}{BC}$

b. *Áp dụng: Cho biết* $AH' = \frac{1}{3}AH$ *và diện tích* ΔABC *là* $67{,}5cm^2$.

Tính diện tích $\Delta AB'C'$.

Giải

a. Xét ΔAHB có B'H' // BC (gt).

Theo hệ quả của định lí Talét, ta có $\frac{AH'}{AH} = \frac{AB'}{AB}$. (1)

Xét ΔABC có: BC // B'C' (gt)

Theo hệ quả của định lí Talét, ta có $\frac{B'C'}{BC} = \frac{AB'}{AB}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{AH'}{AH} = \frac{BC''}{BC}$ – đpcm.

b. Ta có: $AH' = \frac{1}{3}AH \Rightarrow \frac{AH'}{AH} = \frac{BC''}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow B'C' = \frac{1}{3}BC$.

$$\Rightarrow S_{AB'C'} = \frac{1}{2}AH'.B'C' = \frac{1}{2}.\frac{1}{3}AH.\ \frac{1}{3}BC = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}AH.BC\right)$$

Mà, ta có: $S_{ABC} = \frac{1}{2}AH.BC \Rightarrow S_{AB'C} = \frac{1}{9}.67{,}5 = 7{,}5\ (cm^2)$.

Ví dụ 18: (Bài 11/tr 63 – Sgk): ΔABC *có* BC = 15cm. *Trên đường cao* AH *lấy các điểm* I *và* K *sao cho* AK = KI = IH. *Qua* I *và* K *vẽ các đường* EF // BC, MN // BC (*hình* sgk).

a. *Tính độ dài các đoạn thẳng* MN *và* EF.

b. *Tính diện tích tứ giác* MNFE, *biết rằng diện tích của* ΔABC *là* $270cm^2$.

Giải

a. Xét ΔABC có:

$$MN \mathbin{//} BC\ (gt) \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AK}{AH} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{MN}{15} = \frac{1}{3} \Rightarrow MN = 5\ cm.$$

Xét ΔAEF có:

$$MN \mathbin{//} EF\ (gt) \Rightarrow \frac{MN}{EF} = \frac{AK}{AI} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{5}{EF} = \frac{1}{2} \Rightarrow EF = 10\ cm.$$

b. Ta có:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AH.BC = 270\ (cm^2) \Rightarrow AH = \frac{2.270}{BC} = \frac{540}{15} = 36\ (cm)$$

$$\Rightarrow KI = \frac{1}{3}AH = 12\ (cm)$$

Do MN // EF nên MNEF là hình thang.

Suy ra:

$$S_{MNEF} = \frac{1}{2}KI(MN + EF) = \frac{1}{2}.12(5 + 10) = 90\ (cm^2).$$

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Tính tỉ số của các cặp đoạn thẳng sau:

a. AB = 15cm, CD = 9cm.

b. EF = 125cm, GH = 10dm.

Bài 2: Cho biết $\frac{AB}{CD} = \frac{3}{4}$ và CD = 12cm. Tính độ dài của AB.

Bài 3: Cho ΔABC, các trung tuyến AD, BE, CF cắt nhau tại G.

a. Tính tỉ số $\frac{AF}{AB}$.

b. Kể tên một vài cặp đoạn thẳng tỉ lệ với AG và GD.

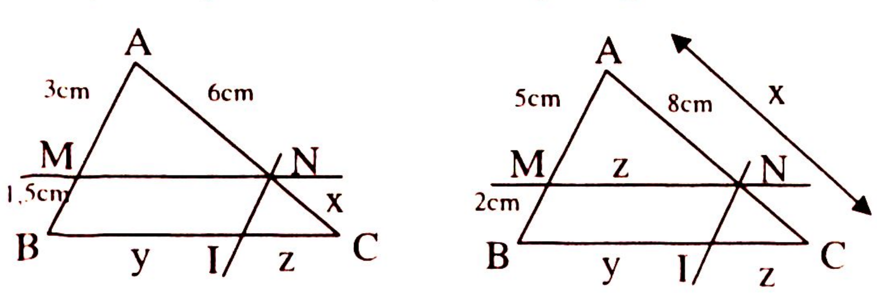
Bài 4: Cho đoạn thẳng AB có độ dài 10cm. Các điểm C, D thuộc đường thẳng AB sao cho $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = \frac{3}{2}$ (C nằm trong, còn D nằm ngoài đoạn thẳng AB). Tính khoảng cách từ C và từ D đến B.

Bài 5: Cho AB = 4CD và CD = $3A_1B_1$.

a. Tính tỉ số của hai đoạn thẳng AB và A_1B_1.

b. Biết MN = 9cm và M_1N_1 = 10,8dm, hỏi hai đoạn thẳng AB, A_1B_1 có tỉ lệ với hai đoạn thẳng MN và M_1N_1 hay không?

Bài 6: Tính độ dài x, y, z của các đoạn thẳng trong hình sau, biết BC = 9cm:



Bài 7: Cho ΔABC có BC = a. Lấy các điểm M, N trên AB sao cho AM = 2MN = 3NB. Từ M, N kẻ các đường thẳng song song với BC cắt cạnh AC theo thứ tự tại D, E. Tính theo a độ dài các đoạn thẳng DM và EN.

Bài 8: Cho ΔABC, AC = 10cm, BC = 9cm. Lấy điểm D trên cạnh BC sao cho BD = 3cm. Lấy các điểm G, H trên cạnh AC sao cho AG = CH = 4cm. Gọi E là giao điểm của BG và AD. Tính tỉ số $\frac{AE}{AD}$.

Bài 9: Cho ΔABC, điểm D thuộc cạnh BC. Cho biết $S_{ABD} = 15cm^2$, $S_{ADC} = 9cm^2$. Tính tỉ số $\frac{BD}{BC}$.

Bài 10: Cho ΔABC. Từ điểm N trên AC kẻ các đường thẳng song song với các cạnh BC và AB, chúng cắt các cạnh AB và BC theo thứ tự tại M và I. Chứng minh rằng $\frac{BM}{BA} + \frac{BI}{BC} = 1$.

Bài 11: Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH, điểm D nằm giữa H và C. Kẻ DE vuông góc với BC ($E \in AC$), kẻ DK vuông góc với AC ($K \in AC$). Chứng minh rằng BE song song với HK.

Bài 12: Hình thang ABCD (AB // CD) có các đường chéo cắt nhau tại O. Biết $OA = \frac{1}{3}OC, AB = 4cm$. Tính độ dài CD.

Bài 13: Hình thang ABCD (AB // CD) có AB = 15cm, CD = 20cm. Gọi M là trung điểm của CD, E là giao điểm của MA và BD, F là giao điểm của MB và AC.

a. Chứng minh rằng EF song song với AB.

b. Tính độ dài EF.

Bài 14: Hình thang ABCD (AB // CD) có AB = a, CD = b (a > b). Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của AD, BD, AC, BC.

a. Chứng minh rằng MN = PQ.

b. Tính độ dài các đoạn thẳng MN, NP, PQ theo a và b.

Bài 15: Cho ba đoạn thẳng có độ dài là m, n, p (cùng đơn vị đo). Dựng đoạn thẳng có độ dài x sao cho:

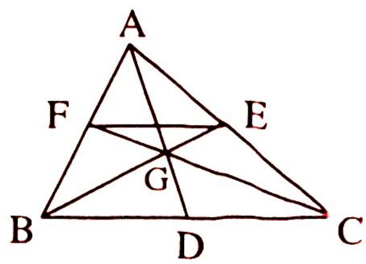
a. $\frac{x}{m} = 2$; b. $\frac{x}{n} = \frac{2}{3}$; c. $\frac{m}{x} = \frac{n}{p}$.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1: $\frac{AB}{CD} = \frac{5}{3}$ và $\frac{EF}{GH} = \frac{5}{4}$.

Bài 2: $\frac{AB}{CD} = \frac{3}{4} \Rightarrow AB = \frac{3}{4}CD = \frac{3}{4}.12 = 9$ (cm).

Bài 3:



a. $\frac{AF}{AB} = 1$.

b. Theo tính chất trọng tâm của tam giác, ta có:

$\frac{AG}{GD} = 2$

suy ra các cặp đoạn thẳng tỉ lệ với AG và GD, bao gồm:

$\frac{BG}{GE} = \frac{CG}{GF} = = 2$, tính chất của trọng tâm tam giác.

$\frac{AB}{AF} = \frac{AC}{AE} = \frac{AB}{BF} = \frac{AC}{CE} = \frac{BC}{CD} = \frac{BC}{BD} = 2$, tính chất trung điểm.

$\frac{BC}{EF} = \frac{AC}{FD} = \frac{AB}{ED} = 2$, tính chất của đường trung bình.

Bài 4: Sử dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau.



- Ta có:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{CA+CB}{CB} = \frac{3+2}{2} \Leftrightarrow \frac{AB}{CB} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow CB = 4cm.$$

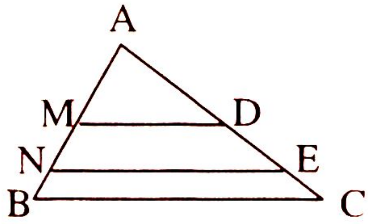
- Ta có:

$$\frac{DA}{DB} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{DA-DB}{DB} = \frac{3-2}{2} \Leftrightarrow \frac{AB}{DB} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow DB = 20cm.$$

Vậy, ta tìm được CB = 4cm và DB = 20cm.

Bài 5: *Học sinh tự làm.*

Bài 6:



a. x = 3cm, y = 6cm, z = 3cm.

b. *Học sinh tự làm.*

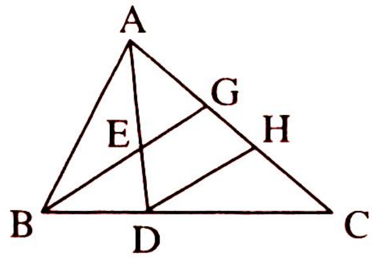
Bài 7: Đặt BN = x, suy ra: AM = 3x, MN = $\frac{3x}{2}$.

- Ta có: $\frac{MD}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{3x}{3x+\frac{3x}{2}+x} = \frac{6}{11} \Leftrightarrow MD = \frac{6a}{11}$.

- Ta có: $\frac{NE}{BC} = \frac{AN}{AB} = \frac{3x+\frac{3x}{2}}{3x+\frac{3x}{2}+x} = \frac{9}{11} \Leftrightarrow NE = \frac{9a}{11}$.

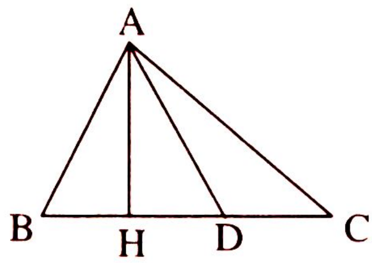
Vậy, ta tìm được MD = $\frac{6a}{11}$ và NE = $\frac{9a}{11}$.

Bài 8: Nhận xét rằng: $\frac{CD}{BD} = \frac{6}{3} = 2$, $\frac{CH}{HG} = \frac{4}{2} = 2$,



$\Rightarrow DH \,//\, BG \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{AG}{AH} = \frac{2}{3}$.

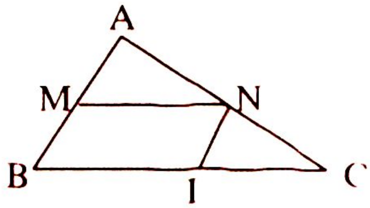
Bài 9: Kẻ đường cao AH, ta có:



$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2}AH.BD}{\frac{1}{2}AH.CD} \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{BD}{CD+BD} = \frac{5}{3+5} \Leftrightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{5}{8}.$$

Bài 10: Trước tiên, ta thấy MNIB là hình bình hành. Suy ra:



$$\frac{BM}{BA} = \frac{NI}{BA} = \frac{CI}{BC}.$$

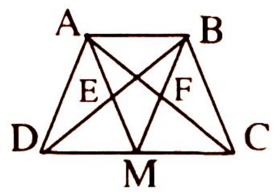
Khi đó: $\frac{BM}{BA} + \frac{BI}{BC} = \frac{CI}{BC} + \frac{BI}{BC} = \frac{CI + BI}{BC} = 1$, đpcm.

Bài 11: *Học sinh tự làm* - Dựa trên các đường thẳng song song được suy ra từ tính chất *"Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau"*.

Bài 12: CD = 12cm.

Bài 13:

a. Ta lần lượt có nhận xét:



- Vì MD // AB nên: $\frac{ME}{AE} = \frac{DM}{AB} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$.
- Vì CD // AB nên: $\frac{MF}{BF} = \frac{CM}{AB} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$.

Suy ra: $\frac{ME}{AE} = \frac{MF}{BF} \Leftrightarrow$ EF // AB, đpcm.

b. Ta có ngay: $\frac{EF}{AB} = \frac{MF}{MB} = \frac{MF}{BF + MF} = \frac{2}{3+2} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow EF = 6cm$.

Bài 15.

a. *Cách dựng*:
- Dựng tia Ax.
- Trên tia Ax dựng hai đoạn thẳng liên tiếp AB = BC = m. Đoạn thẳng AC là đoạn thẳng cần dựng.

Chứng minh:

B nằm giữa A và C, ta có:

$$AC = AB + BC = m + n = 2m \Rightarrow \frac{AC}{m} = \frac{x}{m} = 2 \text{ (thoả mãn bài toán).}$$

b. *Cách dựng*:
- Dựng góc nhọn $\widehat{xOy}$.
- Trên tia Ox, lấy hai điểm A và B sao cho: OA = 2 (đvđd), OB = 3 (đvđd).
- Trên tia Oy, lấy điểm N sao cho ON = n. Qua A kẻ đường thẳng song song với BN cắt Oy tại M thì OM là đoạn thẳng cần dựng.

Chứng minh:

Xét ΔOBN có: AM // BN $\Rightarrow \frac{OM}{ON} = \frac{OA}{OB} \Leftrightarrow \frac{x}{n} = \frac{2}{3}$ (thoả mãn bài toán).

c. *Cách dựng*:
- Dựng góc nhọn $\widehat{xOy}$.
- Trên tia Ox lấy ON = n và OP = p (p > n).
- Trên tia Oy lấy OM = m. Nối M với N và qua P kẻ đường thẳng song song với MN cắt Oy tại Q thì OQ là đoạn thẳng cần dựng.

Chứng minh:

Xét ΔOPQ có: MN // PQ $\Rightarrow \frac{OM}{OQ} = \frac{ON}{OP} \Leftrightarrow \frac{m}{x} = \frac{n}{p}$ (thoả mãn bài toán).

CHỦ ĐỀ 2

TÍNH CHẤT ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

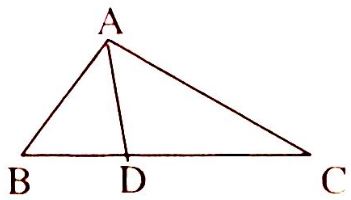
A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. ĐỊNH LÍ

Định lí: Trong tam giác, đường phân giác của một góc chia cạnh đối diện thành hai đoạn thẳng tỉ lệ với hai cạnh kề hai đoạn ấy.

Như vậy, trong ΔABC nếu AD là đường phân giác của góc Â, ta nhận được:

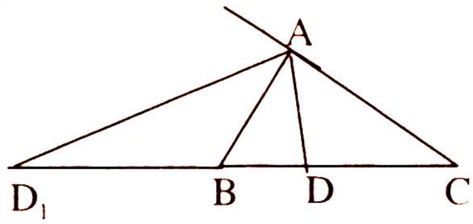
$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} \text{ hoặc } \frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AC}.$$



☞ ***Chú ý***: Định lí trên vẫn đúng đối với tia phân giác của góc ngoài của tam giác, tức là theo hình bên ta cũng có:

$$\frac{BD_1}{CD_1} = \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$$

hoặc $\frac{BD_1}{AB} = \frac{CD_1}{AC}$.



2. ĐỊNH LÍ ĐẢO

Định lí: Chứng minh rằng nếu một đường thẳng đi qua một đỉnh của một tam giác mà chia cạnh đối diện thành hai đoạn tỉ lệ với hai cạnh kề hai đoạn ấy thì nó là đường phân giác trong (hoặc ngoài) của góc tại đỉnh ấy.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: (Bài 15/tr 67 – Sgk): *Tính* x *trong hình sgk và làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất.*

✍ *Giải*

Theo tính chất đường phân giác trong tam giác:

Trong hình a): Xét ΔABC có:

AD là phân giác của $\widehat{BAC} \Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \Leftrightarrow \frac{x}{3,5} = \frac{4,5}{7,2} \Rightarrow x \approx 2,19$ (đvđd).

Trong hình b): Xét ΔMPN có:

PQ là phân giác của MPN

$\Rightarrow \frac{QM}{QN} = \frac{PM}{PN} \Leftrightarrow \frac{12,5 - x}{x} = \frac{6,2}{8,7} \Rightarrow x \approx 7,3$ (đvđd)

Ví dụ 2: *Cho* ΔABC *có* BC = a, AC = b, AB = c *và* AD *là đường phân giác.*

a. *Tính độ dài các đoạn* BD *và* CD *theo* a, b, c.

b. *Tính tỉ số diện tích của hai tam giác* ΔABD *và* ΔACD.

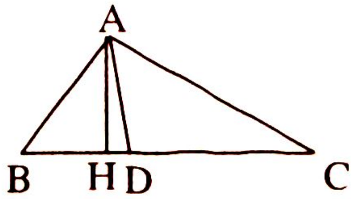
✍ *Giải*

a. Đặt BD = x.

Trong ΔABC có AD là phân giác, suy ra:

$$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}\Leftrightarrow\frac{x}{a-x}=\frac{c}{b}\Leftrightarrow x=\frac{ac}{b+c}$$

$$\Rightarrow CD=BC-BD=a-\frac{ac}{b+c}=\frac{ab}{b+c}.$$

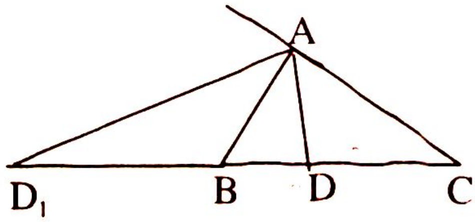


Vậy, ta được $BD=\frac{ac}{b+c}$ và $CD=\frac{ab}{b+c}$.

b. Kẻ đường cao AH, ta có: $\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ACD}}=\frac{\frac{1}{2}AH.BD}{\frac{1}{2}AH.CD}=\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}$.

Ví dụ 3: *Cho* ΔABC *có* AB = 4cm, AC = 6cm, BC = 5cm. *Đường phân giác trong và ngoài của góc* A *cắt* BC *theo thứ tự ở* D *và* D_1. *Tính độ dài* BD, BD_1.

✍ *Giải*



Đặt BD = x và BD_1 = y. Trong ΔABC, ta lần lượt thấy:

- AD là phân giác trong, suy ra:

$$\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}\Leftrightarrow\frac{x}{5-x}=\frac{4}{6}\Leftrightarrow x=2cm.$$

- AD_1 là phân giác ngoài, suy ra:

$$\frac{BD_1}{CD_1}=\frac{AB}{AC}\Leftrightarrow\frac{y}{y+5}=\frac{4}{6}\Leftrightarrow y=10cm.$$

Vậy ta được BD = 2cm và BD_1 = 10cm.

Ví dụ 4: (Bài 19/tr 68 – Sgk): *Cho hình thang* ABCD (AB // CD). *Đường thẳng a song song với* DC, *cắt các cạnh* AD *và* BC *theo thứ tự tại* E *và* F. *Chứng minh rằng*:

a. $\frac{AE}{ED}=\frac{BF}{FC}$. b. $\frac{AE}{AD}=\frac{BF}{BC}$. c. $\frac{DE}{DA}=\frac{CF}{CB}$.

✍ *Giải – Học sinh tự vẽ hình*

a. Đường chéo AC cắt EF tại M.

Do EF // CD (gt), áp dụng định lí Talét đối với ΔACD và ΔCAB, ta có:

$$\frac{AE}{ED}=\frac{AM}{MC}\qquad(1)$$

$$\frac{AM}{MC} = \frac{BF}{FC} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra: $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$ – đpcm. (3)

b. Từ (3), ta có:

$$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC} \Rightarrow \frac{AE}{AE + ED} = \frac{BF}{BF + FC} \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{BF}{BC} \text{ – đpcm.} \quad (4)$$

c. Từ (4), ta có:

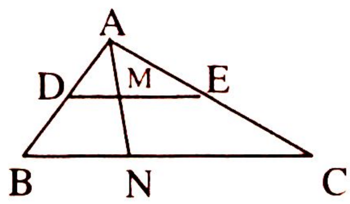
$$\frac{AE}{AD} = \frac{BF}{BC} \Rightarrow \frac{AD - AE}{AD} = \frac{BC - BF}{BC} \Rightarrow \frac{DE}{DA} = \frac{CF}{CB} \text{ – đpcm.}$$

Ví dụ 5: *Cho* ΔABC. *Một đường thẳng song song với* BC *cắt các cạnh* AB, AC *ở* D, E. *Biết* BD = 9cm, CE = 12cm, DE = 14cm. *Điểm* M *nằm trên đoạn thẳng* DE *sao cho* DM = 6cm. *Chứng minh rằng* AM *là tia phân giác của góc* A.

Giải

Theo giả thiết ta có:

$$\frac{MD}{ME} = \frac{MD}{DE - MD} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}. \quad (1)$$



Mặt khác, do DE // BC nên ta có:

$$\frac{AD}{AE} = \frac{DB}{EC} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}. \quad (2)$$

Từ (1), (2), suy ra:

$$\frac{MD}{ME} = \frac{AD}{AE} \Leftrightarrow \text{AM là tia phân giác của góc A.}$$

Ví dụ 6: (Bài 20/tr 68 – Sgk): *Cho hình thang* ABCD (AB // CD). *Hai đường chéo* AC *và* BD *cắt nhau tại* O *và song song với đáy của hình thang cắt các cạnh bên tại* AD, BC *theo thứ tự tại* E *và* F. *Chứng minh rằng* OE = OF (*Hình sgk*).

Giải

Ta có: EF // CD (gt).

Xét ΔACD và BCD có:

$$\frac{OE}{CD} = \frac{AO}{AC} \quad (1)$$

$$\frac{OF}{CD} = \frac{BO}{BD} \quad (2)$$

Xét ΔOAB và ΔOCD có:

$$AB // CD \Rightarrow \frac{AO}{OC} = \frac{BO}{OD} \Rightarrow \frac{AO}{AO + OC} = \frac{BO}{BO + OD} \Rightarrow \frac{AO}{AC} = \frac{BO}{BD}. \quad (3)$$

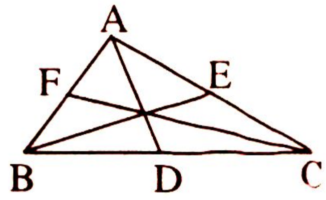
Từ (1); (2) và (3) suy ra: $\frac{OE}{CD} = \frac{OF}{CD} \Rightarrow OE = OF$ – đpcm.

Ví dụ 7: *Cho* ΔABC *có các đường phân giác* AD, BE, CF. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{DB}{DC}.\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB} = 1.$$

Giải

Trong ΔABC, ta lần lượt thấy:

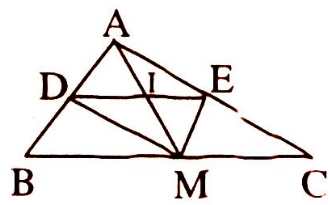


- AD là phân giác, suy ra: $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$.
- BE là phân giác, suy ra: $\frac{EC}{EA} = \frac{BC}{AB}$.
- CF là phân giác, suy ra: $\frac{FA}{FB} = \frac{AC}{BC}$.

Khi đó, ta có: $\frac{DB}{DC}.\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB} = \frac{AB}{AC}.\frac{BC}{AB}.\frac{AC}{BC} = 1$.

Ví dụ 8: (Bài 17/tr 68 – Sgk): *Cho* ΔABC *với trung tuyến* AM. *Đường phân giác của góc* AMB *cắt cạnh* AB *ở* D, *đường phân giác của góc* AMC *cắt cạnh* AC *ở* E. *Chứng minh rằng* DE // BC.

Giải



Với ΔAMB có MD là phân giác, suy ra:

$$\frac{DA}{DB} = \frac{MA}{MB}. \quad (1)$$

Với ΔAMC có ME là phân giác, suy ra:

$$\frac{EA}{EC} = \frac{MA}{MC}. \quad (2)$$

Theo giả thiết MB = MC. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra: $\frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EC} \Leftrightarrow DE // BC$.

Chú ý: Khai thác kết quả của DE // BC ta có thể nêu thêm các câu

a. Gọi I là giao điểm của AM và DE. Chứng minh rằng DI = IE.
b. Tính độ dài DE biết BC = 30cm, AM = 10cm.

Giải

a. Trong các tam giác ΔAMB và ΔAMC có DE // BC suy ra:

$$\frac{DI}{BM} = \frac{AI}{AM} = \frac{EI}{CM} = \frac{EI}{BM} \Leftrightarrow DI = IE.$$

b. Đặt DE = x. Trong ΔDEM, ta có:

$\widehat{DME} = 90^0$, vì MD, ME là tia phân giác của 2 góc kề bù,

$DI = IE \Rightarrow MI$ là trung tuyến $\Rightarrow MI = \frac{1}{2}DE \Rightarrow AI = AM - MI = 10 - \frac{1}{2}x$.

Trong ΔABM, ta có: $\frac{DE}{BC} = \frac{AI}{AM} \Leftrightarrow \frac{x}{30} = \frac{10 - \frac{1}{2}x}{10} \Rightarrow x = 12cm$.

Vậy, ta được DE = 12cm.

Ví dụ 9: (Bài 60/tr 92 – Sgk): *Cho tam giác vuông* ABC, $\hat{A} = 90^0$, $\hat{C} = 30^0$ *và đường phân giác* BD (D *thuộc cạnh* AC).

a. *Tính tỉ số* $\frac{AD}{CD}$.

b. *Cho biết độ dài* AB = 12,5cm, *hãy tính chu vi và diện tích của* ΔABC.

✍ *Giải – Học sinh tự vẽ hình*

a. Xét ΔABC có:

$\hat{A} = 90^0$ và $\hat{C} = 30^0 \Rightarrow AB = \frac{1}{2}BC \Leftrightarrow BC = 2AB = 2.12,5 = 25$ (cm).

Theo tính chất đường phân giác trong tam giác, ta có BD là đường phân giác của góc B $\Rightarrow \frac{AD}{CD} = \frac{AB}{BC} = \frac{12,5}{25} = \frac{1}{2}$.

b. Áp dụng định lí Pitago trong ΔABC vuông tại A, ta được:

$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{25^2 - (12,5)^2} \approx 21,65$ (cm)

Do đó:

$CV_{ABC} = 12,5 + 25 + 21,65 = 59,15$ (cm)

$S_{ABC} = \frac{1}{2}.12,5.21,65 = 135,31$ (cm^2).

Ví dụ 10: (Bài 21/tr 68 – Sgk):

a. *Cho* ΔABC *với đường trung tuyến* AM *và đường phân giác* AD. *Tính diện tích* ΔADM, *biết* AB = m, AC = n (n > m) *và diện tích của* ΔABC *là* S.

b. *Cho* n = 7cm, m = 3cm, *hỏi diện tích* ΔADM *chiếm bao nhiêu phần trăm diện tích* ΔABC.

Giải – Học sinh tự vẽ hình

a. Kẻ đường cao AH của ΔABC ($H \in BC$), ta có:

$$\frac{S_{ADB}}{S_{ADC}} = \frac{\frac{1}{2}AH.BC}{\frac{1}{2}AH.DC} = \frac{BC}{DC} \quad (1)$$

Do AD là phân giác của $\widehat{BAC}$ suy ra:

$$\frac{BC}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{m}{n} \quad (2)$$

Do n > m (gt) nên DC > DB. Suy ra, D nằm giữa B và M.

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{S_{ADB}}{S_{ADC}} = \frac{m}{n} \Leftrightarrow \frac{S_{ADB}}{S_{ADB} + S_{ADC}} = \frac{m}{m+n} \Rightarrow S_{ADB} = \frac{mS}{m+n}$.

Do D nằm giữa B và M nên $S_{ADM} + S_{ADB} = S_{AMB}$ (3)

Lại có: $S_{AMB} = \frac{1}{2}S_{ABC} = \frac{1}{2}S$ (vì có chung đường cao AH và $BM = \frac{1}{2}BC$).

Từ (3) suy ra:

$$S_{ADM} = \frac{1}{2}S - \frac{mS}{m+n} = \frac{S(m+n) - 2mS}{2(m+n)} = \frac{S(n-m)}{2(m+n)}. \quad (4)$$

b. Thay n = 7cm, m = 3cm vào (4), ta được: $S_{ADM} = \frac{4}{20}S = \frac{20}{100}S$.

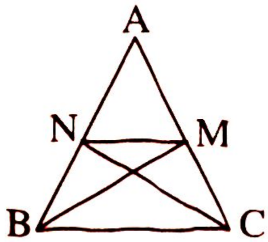
Vậy, ta được $S_{ADM} = 20\%S$.

Ví dụ 11: *Cho* ΔABC *cân tại* A, *có* AB = a, BC = b. *Đường phân giác góc* B *cắt* AC *tại* M, *đường phân giác góc* C *cắt* AB *tại* N.

a. *Chứng minh rằng* MN // BC.

b. *Tính độ dài đoạn* MN *theo* a, b.

Giải



a. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Trong ΔABC, ta lần lượt thấy:

- BM là phân giác, suy ra: $\frac{AM}{CM} = \frac{AB}{BC}$. (1)
- CN là phân giác, suy ra: $\frac{AN}{BN} = \frac{AC}{BC}$. (2)

Theo giả thiết: AB = AC. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra: $\frac{AM}{CM} = \frac{AN}{BN} \Leftrightarrow MN // BC$.

b. Từ kết quả câu a), ta được: $\frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AB} \Leftrightarrow MN = \frac{AN.BC}{AB}$. (4)

Từ (2) suy ra: $\dfrac{AN}{AB - AN} = \dfrac{AC}{BC} \Leftrightarrow \dfrac{AN}{a - AN} = \dfrac{a}{b} \Leftrightarrow AN = \dfrac{a^2}{a+b}$. (5)

Thay (5) và (4), ta được: $MN = \dfrac{\dfrac{a^2}{a+b}.b}{a} = \dfrac{ab}{a+b}$.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho ΔABC có $\hat{A} = 90^0$, $\hat{C} = 30^0$, phân giác BD. Tính tỉ số $\dfrac{AD}{DC}$.

Bài 2: ΔABC có AB = 5cm, AC = 6cm và BC = 7cm. Tia phân giác của goác BAC cắt cạnh BC ở E. Tính các đoạn EB và EC.

Bài 3: ΔABC có độ dài các cạnh AB = m, AC = n và AD là đường phân giác. Chứng minh rằng tỉ số diện tích của ΔABD và diện tích của ΔACD bằng $\dfrac{m}{n}$.

Bài 4: Cho ΔABC có BC = 5cm, AC = 4cm, AB = 6cm và AD là đường phân giác.

a. Tính độ dài các đoạn BD và CD.

b. Tính tỉ số diện tích của hai tam giác ΔABD và ΔACD.

Bài 5: Cho ΔABC với trung tuyến AM. Đường phân giác của góc AMB cắt cạnh AB ở D, đường phân giác của góc AMC cắt cạnh AC ở E.

a. Chứng minh rằng DE // BC.

b. Gọi I là giao điểm của AM và DE. Chứng minh rằng DI = IE.

b. Tính độ dài DE biết BC = 6cm, AM = 8cm.

Bài 6: Cho ΔABC có AB = 4cm, AC = 6cm, BC = 8cm. Đường phân giác trong và ngoài của góc A cắt BC theo thứ tự ở D và E. Tính độ dài BD, BE.

Bài 7: Cho ΔABC có AB = AC = 6cm. Tia phân giác góc B cắt đường cao AH ở I. Biết $\dfrac{AI}{IH} = \dfrac{3}{2}$. Tính chu vi ΔABC.

Bài 8: Cho ΔABC vuông tại A, có AB = a, AC = b, trung tuyến AM, đường phân giác AD và đường cao AH.

a. Tính độ dài các đoạn thẳng BC, BD, CD, AM, DM, AH, HD, AD.

b. Đường thẳng qua D song song với AB cắt CD tại E, tính độ dài DE.

c. Tính diện tích các tam giác ΔABD, ΔACD, ΔADE, ΔCDE.

d. Hỏi diện tích ΔADM chiếm bao nhiêu phần trăm diện tích ΔABC.

Bài 9: Cho ΔABC cân tại A, có AB = a, BC = b, đường phân giác BD. Đường vuông góc với BD tại B cắt đường thẳng AC kéo dài tại E. Tính độ dài các đoạn thẳng AD, CD, CE.

Bài 10: Cho ΔABC, có AB = a, AC = b, trung tuyến AM, đường phân giác AD và diện tích ΔABC bằng S. Hỏi diện tích ΔADM chiếm bao nhiêu phần trăm diện tích ΔABC.

Bài 11: Cho ΔABC, có AB = c, AC = b, BC = a, đường phân giác AD và diện tích ΔABC bằng S. Đường thẳng qua D song song với AB cắt CD tại E.

a. Tính độ dài các đoạn thẳng BD, CD, DE.

b. Tính diện tích các tam giác ΔABD, ΔADE, ΔCDE.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1: $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{1}{2}$.

Bài 2: Do AE là phân giác của $\widehat{BAC}$ nên ta có:

$$\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{EB}{EB + EC} = \frac{AB}{AB + AC} \Leftrightarrow \frac{EB}{7} = \frac{5}{5+6} \Rightarrow EB = 3,18 \text{ (cm)}.$$

$\Rightarrow EC = BC - EB = 7 - 3,18 = 3,82$ (cm).

Bài 3: AD là đường phân giác của $\widehat{BAC}$ suy ra $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{m}{n}$

Kẻ đường cao AH của ΔABC ($H \in BC$), ta có:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2}AH.BD}{\frac{1}{2}AH.CD} = \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{m}{n}.$$

Vậy, ta luôn có $\dfrac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \dfrac{m}{n}$.

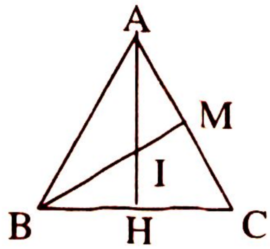
Bài 4:

a. BD = 3cm, CD = 2cm.

b. $\dfrac{3}{2}$.

Bài 5: *Học sinh tự làm.*

Bài 6: *Học sinh tự làm.*



Bài 7: Trong ΔABH, ta có: $\dfrac{BH}{AB} = \dfrac{HI}{AI} \Rightarrow BH = 4$cm.

Khi đó, chu vi của ΔABC được cho bởi:

CV = AB + AC + BC = 2AB + 2HB = 20cm.

Bài 8: *Học sinh tự làm.*

Bài 9: *Hướng dẫn*: BE chính là phân giác ngoài của góc B.

Bài 10: *Đề nghị học sinh tự vẽ hình với b > a.*

Gọi S_1 là diện tích của ΔADM, ta có:

$$\frac{S_1}{S} = \frac{DM}{BC} = \frac{CD - CM}{BC} = \frac{CD}{BC} - \frac{1}{2}. \quad (1)$$

Vì AD là đường phân giác của góc Â nên:

$$\frac{CD}{BD} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow \frac{CD}{BD + CD} = \frac{b}{a + b} \Leftrightarrow \frac{CD}{BC} = \frac{b}{a + b}. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$\frac{S_1}{S} = \frac{b}{a + b} - \frac{1}{2} = \frac{b - a}{2(a + b)} \Leftrightarrow S_1 = \frac{(b - a)S}{2(a + b)}$$

CHỦ ĐỀ 3

HAI TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

Định nghĩa: Nói $\Delta A_1B_1C_1$ gọi là đồng dạng với ΔABC nếu:

$$\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{A}, \hat{B}_1 = \hat{B}, \hat{C}_1 = \hat{C} \\ \dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{B_1C_1}{BC} = \dfrac{C_1A_1}{CA} \end{cases}.$$

Khi đó:

- Kí hiệu $\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta ABC$.
- Tỉ số $\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{B_1C_1}{BC} = \dfrac{C_1A_1}{CA} = k$ gọi là *tỉ số đồng dạng*.

☞ ***Chú ý***: Khi viết $\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta ABC$, chúng ta cần hiểu ở đó có sự tương ứng giữa các đỉnh của hai tam giác với nhau, tức là không thể viết lại kí hiệu trên dưới dạng:

$$\Delta B_1A_1C_1 \backsim \Delta ABC,$$

và nếu muốn đảo đỉnh thì cần đảo cả hai vế của dấu đồng dạng $\Delta B_1A_1C_1 \backsim \Delta BAC$.

2. TÍNH CHẤT

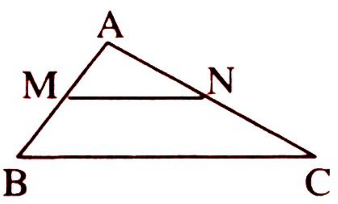
Từ định nghĩa về hai tam giác đồng dạng, ta có được các tính chất sau:

1. Mỗi tam giác đồng dạng với chính nó.
2. Nếu $\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta ABC$ với tỉ số k thì $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$ với tỉ số $\dfrac{1}{k}$.
3. Nếu $\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta A_2B_2C_2$ với tỉ số k_1 và $\Delta A_2B_2C_2 \backsim \Delta ABC$ với tỉ số k_2 thì $\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta ABC$ với tỉ số $k_1.k_2$.

3. ĐỊNH LÍ

Định lí: *Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới đồng dạng với tam giác đã cho.*

Như vậy, theo hình vẽ ta có:

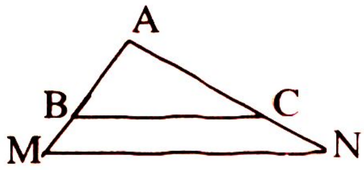


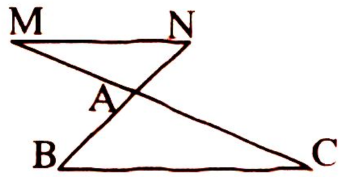
$$\Delta AMN \backsim \Delta ABC,$$

Tỉ số đồng dạng:

$$k = \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

☛ *Chú ý*: Định lí trên vẫn đúng trong trường hợp đường thẳng d cắt phần kéo dài hai cạnh của tam giác và song song với cạnh còn lại, tức là theo hình bên ta cũng có:





$$\Delta AMN \backsim \Delta ABC,$$

Tỉ số đồng dạng :

$$k = \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}.$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: CHỨNG MINH HAI TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG THEO ĐỊNH NGHĨA

Ví dụ 1: (Bài 23/tr 71 – Sgk): *Trong hai mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng? Mệnh đề nào sai?*

a. *Hai tam giác bằng nhau thì đồng dạng với nhau.*

b. *Hai tam giác đồng dạng với nhau thì bằng nhau.*

✍ *Giải*

a. Mệnh đề "Hai tam giác bằng nhau thì đồng dạng với nhau" là đúng vì nếu hai tam giác bằng nhau thì có ba cặp góc tương ứng bằng nhau và ba cặp này tỉ lệ với nhau.

b. Mệnh đề "Hai tam giác đồng dạng với nhau thì bằng nhau" là sai vì nếu hai tam giác đồng dạng thì có ba cặp góc tương ứng bằng nhau và ba cặp cạnh tương ứng tỉ lệ nhưng không bằng nhau. Do đó, hai tam giác không bằng nhau.

Ví dụ 2: (Bài 27/tr 71 – Sgk): *Từ điểm* M *thuộc cạnh* AB *của* ΔABC *với* $AM = \frac{1}{2}MB$, *kẻ các tia song song với* AC *và* BC, *chúng cắt* BC *và* AC *lần lượt tại* L *và* N.

a. *Nêu tất cả các cặp tam giác đồng dạng.*

b. *Đối với mỗi cặp tam giác đồng dạng, hãy viết các cặp góc bằng nhau và tỉ số đồng dạng tương ứng.*

✍ *Giải – Học sinh tự vẽ hình*

a. Ta có ba cặp tam giác đồng dạng:

- $MN // BC \Rightarrow \Delta AMN \backsim \Delta ABC$ (1)
- $LM // AC \Rightarrow \Delta BML \backsim \Delta BAC$ (2)
- Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta BML \backsim \Delta AMN$

b. Ta có:

$$\Delta AMN \backsim \Delta ABC \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} \text{ chung}, \widehat{M_1} = \hat{B}, \widehat{N_1} = \hat{C} \\ k = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{1}{3} \end{cases}.$$

$$\Delta BML \backsim \Delta BAC \Rightarrow \begin{cases} \hat{B} \text{ chung}, \widehat{M_2} = \hat{A}, \widehat{L_1} = \hat{C} \\ k = \dfrac{BM}{BA} = \dfrac{2}{3} \end{cases}.$$

$$\Delta BML \backsim \Delta AMN \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} = \widehat{M_2}, \widehat{M_1} = \hat{B}, \widehat{N_1} = \widehat{L_1} \\ k = \dfrac{AM}{MB} = \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Ví dụ 3: (Bài 24/tr 71 – Sgk): $\Delta A'B'C' \backsim \Delta A''B''C''$ *theo tỉ số đồng dạng* k_1, $\Delta ABC \backsim \Delta A''B''C''$ *theo tỉ số* k_2. *Hỏi* $\Delta A'B'C'$ *đồng dạng với* ΔABC *theo tỉ số nào?*

Giải

Ta có:

$\Delta A'B'C' \backsim \Delta A''B''C''$ theo tỉ số đồng dạng $k_1 \Rightarrow A'B' = k_1A''B''$.

$\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$ theo tỉ số $k_2 \Rightarrow A''B'' = k_2AB \Rightarrow AB = \dfrac{A''B''}{k_2}$

Vậy, $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$ theo tỉ số $\dfrac{A'B'}{AB} = k_1k_2$.

Ví dụ 4: *Cho* ΔABC *có* AB = 6cm, AC = 9cm. *Các điểm* D, E *theo thứ tự thuộc các cạnh* AB, AC *sao cho* BD = 4cm, CE = 6cm.

a. *Chứng minh rằng* $\Delta ADE \backsim \Delta ABC$ *và xác định tỉ số đồng dạng.*

b. *Kẻ* EK // AB ($K \in BC$). *Chứng minh rằng* $\Delta ADE \backsim \Delta EKC$.

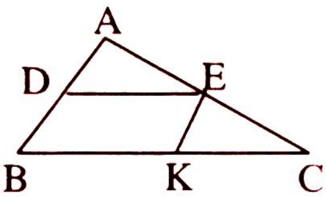
c. *Tính tỉ số chu vi* ΔADE *và* ΔEKC.

Giải

a. Trong ΔABC ta có:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \frac{AE}{AC} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow DE \,//\, BC$$

$\Rightarrow \Delta ADE \backsim \Delta ABC$.



Tỉ số đồng dạng của ΔADE và ΔABC là:

$k = \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{1}{3}$.

b. Theo kết quả câu a) ta có $\Delta ADE \backsim \Delta ABC$.

Mặt khác vì EK // AB nên $\Delta EKC \backsim \Delta ABC$.

suy ra $\Delta ADE \backsim \Delta EKC$.

c. Theo kết quả câu b) ta có $\Delta ADE \backsim \Delta EKC$ suy ra:

$$\frac{AD}{EK} = \frac{DE}{KC} = \frac{AE}{EC} = \frac{1}{2} = \frac{AD + DE + AE}{EK + KC + EC} = \frac{CV_{\Delta ADE}}{CV_{\Delta EKC}}.$$

Vậy, ta được $CV_{\Delta ADE} = \frac{1}{2}CV_{\Delta EKC}$.

Vấn đề 2: SỬ DỤNG TÍNH CHẤT HAI TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG GIẢI BÀI TOÁN ĐỊNH TÍNH VÀ ĐỊNH LƯỢNG

Ví dụ 1: *Cho hai tam giác $\Delta A_1B_1C_1$ và ΔABC đồng dạng với nhau theo tỉ số k. Chứng minh rằng tỉ số chu vi của hai tam giác cũng bằng k.*

✍ *Giải*

Từ giả thiết, ta có:

$$k = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA} = \frac{A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1}{AB + BC + CA} = \frac{CV_{\Delta A_1B_1C_1}}{CV_{\Delta ABC}}.$$

Ví dụ 2: *Cho ΔABC có AB = 3cm, BC = 4cm, CA = 5cm. Biết $\Delta A_1B_1C_1$ đồng dạng với ΔABC.*

a. *Tính các cạnh A_1B_1, A_1C_1, biết B_1C_1 = 8cm.*

b. *Tính các cạnh A_1B_1, B_1C_1, A_1C_1, biết $\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta ABC$ theo tỉ số bằng 3.*

✍ *Giải*

a. Ta có ngay:

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA} \Leftrightarrow \frac{A_1B_1}{3} = \frac{8}{4} = \frac{C_1A_1}{5} \Rightarrow \begin{cases} A_1B_1 = 6cm \\ A_1C_1 = 10cm \end{cases}.$$

Vậy, với B_1C_1 = 8cm ta được A_1B_1 = 6cm, A_1C_1 = 10cm.

b. Ta có ngay:

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA} = k \Leftrightarrow \frac{A_1B_1}{3} = \frac{B_1C_1}{4} = \frac{C_1A_1}{5} = 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1B_1 = 9cm \\ B_1C_1 = 12cm \\ A_1C_1 = 15cm \end{cases}.$$

Vậy, ta được A_1B_1 = 9cm, B_1C_1 = 12cm, A_1C_1 = 15cm.

Ví dụ 3: *Qua điểm O ở bên trong ΔABC kẻ các đường thẳng song song với các cạnh của tam giác. Các đường thẳng này chia tam giác thành 6 phần, trong đó có 3 tam giác lần lượt có diện tích là* $4cm^2$, $9\ cm^2$, $16\ cm^2$. *Tính diện tích của* ΔABC.

✍ *Giải*

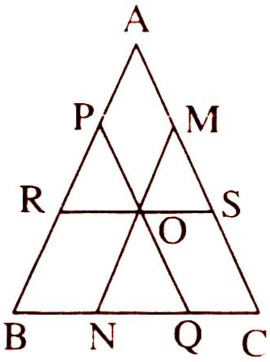
Giả sử qua O kẻ các đường thẳng: RS // BC, MN // AB, PQ // AC.

Dễ dàng thấy rằng các tam giác ΔABC, ΔOMS, ΔOPR, ΔOMQ đồng dạng với nhau, do đó nếu gọi S, S_1, S_2, S_3 theo thứ tự là diện tích của các tam giác, ta có:

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{PR}{AB}\right)^2 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{S}} = \frac{PR}{AB}. \quad (1)$$

$$\frac{S_2}{S} = \left(\frac{OM}{AB}\right)^2 \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{S}} = \frac{OM}{AB} = \frac{AP}{AB}. \quad (2)$$

$$\frac{S_3}{S} = \left(\frac{ON}{AB}\right)^2 \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{S}} = \frac{ON}{AB} = \frac{RB}{AB}. \quad (3)$$



Cộng theo vế (1), (2), (3), ta được:

$$\frac{2+3+4}{\sqrt{S}} = \frac{AP+PR+RB}{AB} = \frac{AB}{AB} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{S} = 9 \Leftrightarrow S = 81\ cm^2.$$

Vậy, diện tích của ΔABC là $S = 81\ cm^2$.

Ví dụ 4: *Người ta lập hai bản đồ của một thửa ruộng hình tam giác, bản thứ nhất theo tỉ xích* 1:1000, *bản thứ hai theo tỉ xích* 1:10000. *Tính tỉ số đồng dạng của bản đồ thứ nhất với bản đồ thứ hai.*

✍ *Giải*

Gọi ΔABC là hình biểu diễn mảnh đất, $\Delta A_1B_1C_1$ và $A_2B_2C_2$ là hình của các bản đồ với tỉ xích 1: 1000 và 1: 10000.

Ta có: $\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta ABC$, $\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{1}{1000}$.

$\Delta A_2B_2C_2 \backsim \Delta ABC$, $\dfrac{A_2B_2}{AB} = \dfrac{1}{10000}$.

Suy ra: $\dfrac{A_1B_1}{AB} : \dfrac{A_2B_2}{AB} = \dfrac{1}{1000} : \dfrac{1}{10000} \Rightarrow \dfrac{A_1B_1}{A_2B_2} = 10$.

Vậy, ta được $\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta A_2B_2C_2$, tỉ số $\dfrac{A_1B_1}{A_2B_2} = 10$.

Ví dụ 5: (Bài 25/tr 71 – Sgk): *Cho* ΔABC. *Hãy vẽ một tam giác đồng dạng với* ΔABC *theo tỉ số đồng dạng* $\dfrac{1}{2}$.

✍ *Giải*

Cách dựng: Ta lần lượt:

- Dựng ΔABC bất kì.
- M là trung điểm cạnh BC và N là trung điểm cạnh AC.
- Nối M với N thì ΔAMN là tam giác cần dựng.

Chứng minh: Do M và N là trung điểm của hai cạnh AB và AC, suy ra MN là đường trung bình của ΔABC, suy ra:

$$MN \parallel BC \text{ và } MN = \frac{1}{2}BC \Rightarrow \Delta AMN \backsim \text{tg}ABC.$$

Tỉ số đồng dạng của hai tam giác này là: $k = \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$.

Vậy, ta đã được dựng được tam giác AMN thoả mãn bài toán.

Vấn đề 3: CHỨNG MINH HAI TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG THEO BA CẠNH TỈ LỆ

Phương pháp

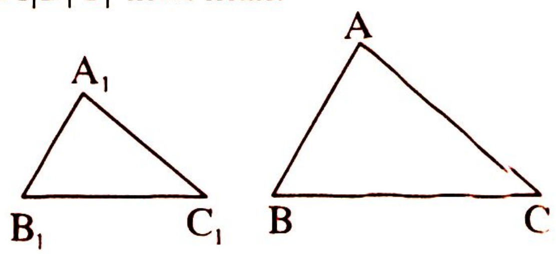
Dựa trên kết quả:

***Định lí**: Nếu ba cạnh của tam giác này tỉ lệ với ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng.*

Như vậy, nếu hai tam giác ΔABC và $\Delta A_1B_1C_1$ thoả mãn:

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA}$$

$$\Leftrightarrow \Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta ABC$$



và khi đó ta có ngay:

$$\hat{A}_1 = \hat{A}, \hat{B}_1 = \hat{B}, \hat{C}_1 = \hat{C}.$$

Ví dụ 1: (Bài 29/tr 74 – Sgk): *Cho hai tam giác ABC và A'B'C' có kích thước như trong hình vẽ sgk.*

a. *ΔABC và ΔA'B'C' có đồng dạng với nhau không? Vì sao?*

b. *Tính tỉ số chu vi của hai tam giác đó?*

✍ *Giải*

a. Ta có: $\frac{A'B'}{AB} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$; $\frac{A'C'}{AC} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$; $\frac{B'C'}{BC} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

$$\Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{2}{3}$$

Do đó, ta được ΔABC ∽ ΔA'B'C' (c.c.c).

b. Ta có: $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C' \Rightarrow k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{2}{3}$

$$\Rightarrow \frac{A'B' + A'C' + B'C'}{AB + AC + BC} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{CV_{(A'B'C')}}{CV_{(ABC)}} = \frac{2}{3}.$$

Vậy, tỉ số chu vi của hai tam giác đồng dạng bằng tỉ số đồng dạng.

Ví dụ 2: *Cho ΔABC vuông tại A có AB = 3cm, BC = 5cm và $\Delta A_1B_1C_1$ vuông tại B_1 có A_1B_1 = 6cm, B_1C_1 = 8cm. Hỏi rằng hai tam giác vuông ΔABC và $\Delta A_1B_1C_1$ có đồng dạng với nhau không? Vì sao?*

✍ *Giải*

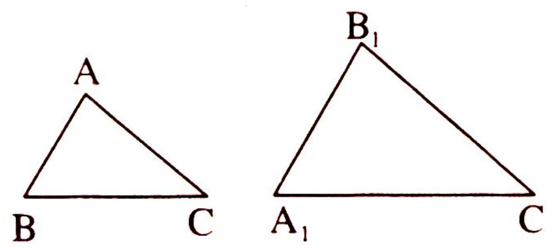
Trong ΔABC vuông tại A, ta có:

$$AC^2 = BC^2 - AB^2 = 25 - 9 = 16 \Leftrightarrow AC = 4cm.$$

Trong $\Delta A_1B_1C_1$ vuông tại B_1, ta có:

$$A_1C_1^2 = A_1B_1^2 + C_1B_1^2 = 36 + 64 = 100 \Leftrightarrow A_1C_1 = 10cm.$$

Nhận xét rằng:



$$\frac{AB}{B_1A_1} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{BC}{A_1C_1} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{CA}{C_1B_1} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2},$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{B_1A_1} = \frac{BC}{A_1C_1} = \frac{CA}{C_1B_1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \Delta ABC \backsim \Delta B_1A_1C_1 \text{ với tỉ số } k = \frac{1}{2}.$$

☞ ***Nhận xét:***

1. Vì ΔABC vuông tại A và $\Delta A_1B_1C_1$ vuông tại B_1 nên nếu hai tam giác này đồng dạng thì không thể có tương ứng $A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$ bởi ta có $\hat{A} = \hat{B}_1 = 90^0$ do đó tương ứng sẽ phải xuất phát từ $A \to B_1$.
2. Trong lời giải trên, trước tiên chúng ta đi xác định độ dài các cạnh còn lại của hai tam giác dựa trên định lí Pitago, sau đó bằng việc đánh giá được tỉ số giữa các cạnh tương ứng bằng $\frac{1}{2}$, ta khẳng định được $\Delta ABC \backsim \Delta B_1A_1C_1$ với tỉ số $k = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 3: (Bài 31/tr 75 – Sgk): *Cho hai tam giác đồng dạng có tỉ số chu vi là* $\frac{15}{17}$ *và hiệu độ dài hai cạnh tương ứng của chúng là* 12,5cm. *Tính hai cạnh đó.*

✍ *Giải*

Giả sử, ΔABC ∽ ΔA'B'C' có hai cạnh tương ứng là A'B' là AB.

Theo đề bài, ta có:

$AB - A'B' = 112,5$

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{15}{17} \Rightarrow \frac{A'B'}{AB - A'B'} = \frac{15}{17-15} \Leftrightarrow \frac{A'B'}{12,5} = \frac{15}{2} \Leftrightarrow A'B' \approx 93,75\ (cm)$$

$\Rightarrow AB = 12,5 + A'B' = 106,25$ (cm).

Ví dụ 4: (Bài 30/tr 75 – Sgk): ΔABC *có độ dài các cạnh là* AB = 3cm, AC = 5cm, BC = 7cm. ΔA'B'C' *đồng dạng với* ΔABC *và có chu vi bằng* 55cm. *Hãy tính độ dài các cạnh của* ΔA'B'C' (*làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai*).

✍ *Giải*

Ta có ΔABC ∽ ΔA'B'C'

Suy ra: $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'B'+A'C'+B'C'}{AB+AC+BC} = \frac{55}{3+5+7} = \frac{11}{3}$.

Do đó, ta có:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{11}{3} \Rightarrow A'B' = \frac{11}{3}AB = \frac{11}{3}.3 = 11\ (cm);$$

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{11}{3} \Rightarrow A'C' = \frac{11}{3}AC = \frac{11}{3}.5 \approx 18,33\ (cm);$$

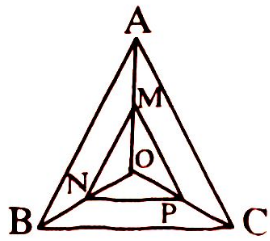
$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{11}{3} \Rightarrow B'C' = \frac{11}{3}BC = \frac{11}{3}7 \approx 25,67\ (cm).$$

Ví dụ 5: *Cho* ΔABC, *điểm* O *ở bên trong tam giác. Gọi* M, N, P *theo thứ tự là trung điểm của* OA, OB, OC.

a. *Chứng minh rằng* ΔABC *đồng dạng với* ΔMNP.

b. *Tính chu vi của* ΔMNP *biết chu vi của* ΔABC *bằng* 88cm.

✍ *Giải*



a. Trong ΔOAB, ta có:

$$\begin{cases} OM = AM \\ ON = BN \end{cases} \Rightarrow MN = \frac{1}{2}AB \Leftrightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{1}{2}.$$

Chứng minh tương tự, ta có: $\frac{NP}{BC} = \frac{1}{2}$, $\frac{PM}{CA} = \frac{1}{2}$.

Vậy ta được: $\frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{PM}{CA} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$ ΔMNP ∽ ΔABC theo tỉ số $k = \frac{1}{2}$.

b. Ta có ngay: $\frac{CV_{\Delta MNP}}{CV_{\Delta ABC}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow CV_{\Delta MNP} = \frac{1}{2}CV_{\Delta ABC} = 44cm.$

Ví dụ 6: *Cho* ΔABC, *biết* AB = 6cm, BC = 10cm, CA = 8cm. *Trên AB lấy điểm* M *sao cho* AM = 4cm, *trên* AC *lấy điểm* N *sao cho* AN = 3cm. *Chứng minh rằng* ΔABC *đồng dạng với* ΔANM.

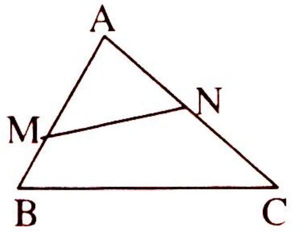
✍ *Giải*

Trong ΔABC, ta có nhận xét:

$AB^2 + AC^2 = 36 + 64 = 100 = BC^2 \Leftrightarrow$ ΔABC vuông tại A.

Trong ΔAMN vuông tại A, ta có:

$MN^2 = AM^2 + AN^2 = 16 + 9 = 25 \Leftrightarrow MN = 5cm.$



Nhận xét rằng:

$$\frac{AN}{AB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad \frac{NM}{BC} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}, \quad \frac{MA}{CA} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2},$$

$$\Rightarrow \frac{AN}{AB} = \frac{NM}{BC} = \frac{MA}{CA} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \Delta ANM \backsim \Delta ABC \text{ với tỉ số } k = \frac{1}{2}.$$

☞ ***Chú ý***: Xuất phát từ tam giác vuông có độ dài các cạnh bằng 3cm, 4cm, 5cm và dựa trên sự đồng dạng theo tỉ số ba cạnh chúng ta sẽ tạo ra được vô số tam giác vuông có các cạnh nguyên là:

6cm, 8cm, 10cm

9cm, 12cm, 15cm

...

Vấn đề 4: CHỨNG MINH HAI TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG THEO HAI CẠNH VÀ GÓC XEN GIỮA

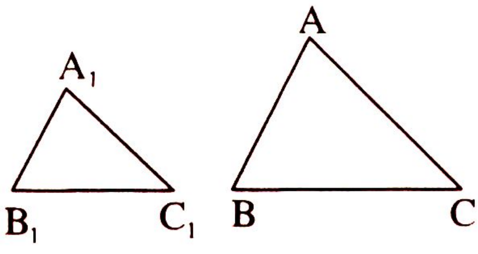
Phương pháp

Dựa trên kết quả:

Định lí: *Nếu hai cạnh của tam giác này tỉ lệ với hai cạnh của tam giác kia và hai góc tạo bởi các cặp cạnh đó bằng nhau, thì hai tam giác đó đồng dạng.*

Như vậy, nếu hai tam giác ΔABC và $\Delta A_1B_1C_1$ thoả mãn:

$$\begin{cases} \dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{C_1A_1}{CA} \\ \hat{A}_1 = \hat{A} \end{cases} \Leftrightarrow \Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta ABC$$



và khi đó ta có ngay: $\begin{cases} \hat{B}_1 = \hat{B}, \hat{C}_1 = \hat{C} \\ \dfrac{B_1C_1}{BC} = \dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{C_1A_1}{CA} \end{cases}.$

Ví dụ 1: *Cho* ΔABC *có* AB = 12cm, AC = 15cm, BC = 18cm. *Trên cạnh* AB *lấy điểm* M *sao cho* AM = 10cm. *Trên cạnh* AC *lấy điểm* N *sao cho* AN = 8cm.

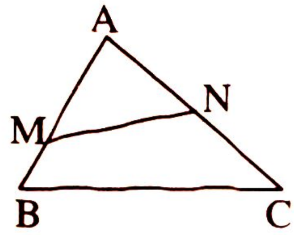
a. *Tam giác* ΔAMN *đồng dạng với tam giác nào?*

b. *Tính độ dài đoạn* MN.

✍ *Giải*

a. Với hai tam giác ΔAMN và ΔABC, ta có: $\begin{cases} \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{10}{15} = \dfrac{2}{3} \\ \widehat{A} \text{ chung} \\ \dfrac{AN}{AB} = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3} \end{cases}$

⇔ ΔAMN ∽ ΔACB với tỉ số đồng dạng $k = \dfrac{2}{3}$.



b. Theo câu a), ta có ngay:

$$\frac{MN}{CB} = \frac{AM}{AC} \Leftrightarrow MN = \frac{AM.CB}{AC} = 12cm.$$

Vậy, ta được MN = 12cm.

Ví dụ 2: *Cho* ΔABC *có* AB = 4cm, AC = 5cm, BC = 6cm. *Trên tia đối của tia* AB *lấy điểm* D *sao cho* AD = 5cm.

a. *Tam giác* ABC *đồng dạng với tam giác nào?*

b. *Tính độ dài* CD.

c. *Chứng minh rằng* $\widehat{BAC} = 2\widehat{ACB}$.

✍ *Giải*

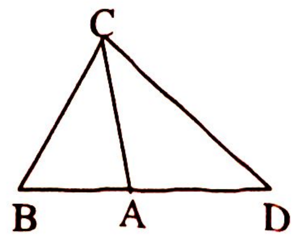
a. Với hai tam giác ΔABC và ΔCBD, ta có nhận xét:

$$\begin{cases} \widehat{B} \text{ chung} \\ \dfrac{AB}{CB} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3} \text{ và } \dfrac{BC}{BD} = \dfrac{6}{4+5} = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABC \backsim \Delta CBD.$$

b. Từ kết quả câu a), ta có:

$$\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{CB} \Leftrightarrow CD = \frac{AC.CB}{AB} = 7{,}5cm.$$

Vậy, ta được CD = 7,5cm.



c. Từ kết quả câu a), ta có ngay $\widehat{BAC} = \widehat{BCD}$.

Nhận xét rằng: $\dfrac{BA}{DA} = \dfrac{4}{5}$, $\dfrac{BC}{DC} = \dfrac{6}{7{,}5} = \dfrac{4}{5}$

$\Rightarrow \dfrac{BA}{DA} = \dfrac{BC}{DC}$ ⇔ CA là đường phân giác của góc $\widehat{BCD}$

$\Leftrightarrow \widehat{BCD} = 2\widehat{ACB} \Leftrightarrow \widehat{BAC} = 2\widehat{ACB}$.

Ví dụ 3: (Bài 34/tr 77 – Sgk): Dựng tam giác ABC, biết $\hat{A} = 60^0$, tỉ số $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{4}{5}$ và đường cao AH = 6cm.

Giải

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Dựng góc $\widehat{xAy} = 60^0$.

Trên cạnh Ax lấy điểm B' sao cho AB' = 4cm, trên cạnh Ay lấy điểm C' sao cho AC' = 5cm. Ta xác định được ΔAB'C'.

Bước 2: Dựng tia AH' ⊥ B'C' (H' ∈ B'C'). Trên tia AH' lấy điểm H sao cho AH = 6cm. Qua H kẻ đường thẳng song song với B'C' cắt Ax tại B và Ay tại C. ΔABC là tam giác cần dựng.

Chứng minh:

Ta có:

AH ⊥ BC (vì BC // B'C')

AH = 6cm (theo cách dựng)

Do đó, AH là đường cao của ΔABC.

Theo định lí Talét, ta có: $\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'}$ hay $\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'} = \frac{4}{5}$.

Vậy, ta dựng được ΔABC thoả mãn đề bài.

Ví dụ 4: *Dựng* ΔABC *biết* $\hat{A} = 60^0$, $\frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$ *và trung tuyến* AM = 3cm.

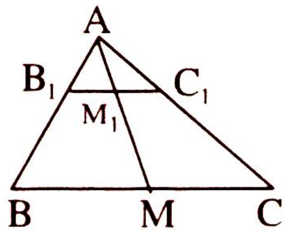
Giải

Phân tích: Giả sử đã dựng được ΔABC thoả mãn điều kiện đầu bài.

Với điểm M_1 bất kì trên AM, dựng đường thẳng song song với BC cắt AB, AC theo thứ tự tại B_1C_1, ta có:

AM_1 là trung tuyến của ΔAB_1C_1.

$\frac{AB_1}{AC_1} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$.



Cách dựng: Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng góc $\widehat{xAy} = 60^0$.
- Trên Ax lấy điểm B_1 bất kì, trên Ay lấy điểm C_1 sao cho $AC_1 = 2AB_1$.
- Gọi M_1 là trung điểm B_1C_1, trên tia AM_1 lấy điểm M sao cho AM = 3cm.
- Qua M dựng đường thẳng song song với B_1C_1, cắt AB_1 và AC_1 theo thứ tự tại B và C.

Khi đó, ΔABC là tam giác phải dựng.

Chứng minh: Vì BC // B_1C_1 nên:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'} = \frac{1}{2}; \qquad \begin{cases} \frac{BM}{B_1M_1} = \frac{AM}{AM_1} = \frac{MC}{M_1C_1} \\ B_1M_1 = C_1M_1 \end{cases} \Rightarrow BM = MC.$$

Biện luận: Bài toán có một nghiệm hình.

Vấn đề 5: CHỨNG MINH HAI TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG THEO HAI GÓC BẰNG NHAU

Phương pháp

Dựa trên kết quả:

***Định lí**: Nếu hai góc của tam giác này bằng hai góc của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng.*

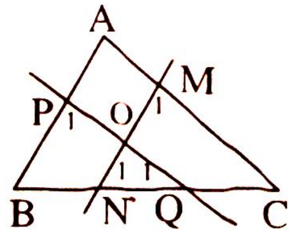
Như vậy, nếu hai tam giác ΔABC và $\Delta A_1B_1C_1$ thoả mãn:

$$\hat{A}_1 = \hat{A}, \hat{B}_1 = \hat{B} \Leftrightarrow \Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta ABC$$

và khi đó ta có ngay: $\begin{cases} \hat{C}_1 = \hat{C} \\ \dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{B_1C_1}{BC} = \dfrac{C_1A_1}{CA} \end{cases}$.

Ví dụ 1: *Cho ΔABC, O là điểm ở bên trong tam giác. Kẻ qua O đường thẳng song song với AB cắt AC, BC theo thứ tự tại M, N. Kẻ qua O đường thẳng song song với AC cắt AB, BC theo thứ tự tại P, Q. Hãy vẽ hình và chỉ ra trên hình đó những tam giác đồng dạng và giải thích vì sao chúng đồng dạng?*

✍ *Giải*



Vì MN // AB nên: $\begin{cases} \widehat{M}_1 = \hat{A} \\ \hat{N}_1 = \hat{B} \end{cases} \Leftrightarrow \Delta MCN \backsim \Delta ACB.$

Vì PQ // AC nên: $\begin{cases} \hat{P}_1 = \hat{A} \\ \widehat{Q}_1 = \hat{C} \end{cases} \Leftrightarrow \Delta PBQ \backsim \Delta ABC.$

Ta có được: $\begin{cases} \hat{N}_1 = \hat{B} \\ \hat{Q}_1 = \hat{C} \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ONQ \backsim \Delta ABC \Rightarrow \Delta ONQ \backsim \Delta PBQ.$

Vậy, ta có được bốn cặp tam giác đồng dạng.

Ví dụ 2: (Bài 44/tr 80 – Sgk): *Cho ΔABC có các cạnh AB = 24cm, AC = 28cm. Tia phân giác của góc A cắt cạnh BC tại D. Gọi M, N theo thứ tự là hình chiếu của B và C trên đường thẳng AD.*

a. *Tính tỉ số* $\dfrac{BM}{CN}$.

b. *Chứng minh rằng* $\dfrac{AM}{AN} = \dfrac{DM}{DN}$.

✍ *Giải – Học sinh tự vẽ hình*

a. Ta có: $A_1 = A_2$ (gt) và $\widehat{AMB} = \widehat{ANC} = 90^0 \Rightarrow \Delta AMB \backsim \Delta ANC$

$$\Rightarrow \frac{BM}{CN} = \frac{AM}{AN} = \frac{AB}{AC} = \frac{24}{28} = \frac{6}{7}. \quad (1)$$

b. Ta có: $D_1 = D_2$ (đđ) và DMB = DNC = 90^0 (gt)

$$\Rightarrow \Delta DMB \backsim \Delta DNC \Rightarrow \frac{DM}{DN} = \frac{BM}{CN} = \frac{6}{7}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra, $\frac{AM}{AN} = \frac{DM}{DN}$ – đpcm.

Ví dụ 3: (Bài 45/tr 80 – Sgk): *Hai tam giác* ABC *và* DEF *có* $\hat{A} = \hat{D}, \hat{B} = \hat{E}$, AB + 8cm, BC = 10cm, DE = 6cm. *Tính độ dài các cạnh* AC, DF *và* EF, *biết rằng cạnh* AC *dài hơn cạnh* DF *là* 3cm.

✍ *Giải – Học sinh tự vẽ hình*

Từ giả thiết, ta có:

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{D} \\ \hat{B} = \hat{E} \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta DEF \Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \qquad (1)$$

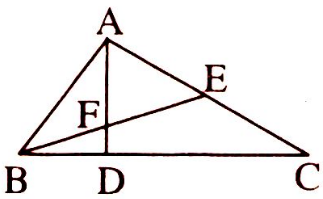
Từ (1) suy ra, ta có:

$$\frac{AC - DF}{DF} = \frac{4-3}{3} \Leftrightarrow \frac{3}{DF} = \frac{1}{3} \Rightarrow DF = 9 \text{ (cm)}.$$

$$\frac{BC}{EF} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{10}{EF} = \frac{4}{3} \Rightarrow EF = 7{,}5 \text{ (cm)}.$$

Ví dụ 4: *Cho* ΔABC *vuông tại* A, *đường cao* AD, *đường phân giác* BE. *Giả sử* AD *cắt* BE *tại* F. *Chứng minh rằng* $\frac{EA}{EC} = \frac{FD}{FA}$.

✍ *Giải*



Trong ΔABD có BF là phân giác suy ra:

$$\frac{FD}{FA} = \frac{BD}{BA}. \qquad (1)$$

Với hai tam giác ΔABD và ΔCBA, ta có nhận xét:

$$\begin{cases} \widehat{ADB} = \widehat{CAB} \\ \hat{B} \text{ chung} \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABD \backsim \Delta CBA \Rightarrow \frac{BD}{BA} = \frac{AB}{CB}. \qquad (2)$$

Trong ΔABC có BE là phân giác suy ra:

$$\frac{AB}{CB} = \frac{EA}{EC}. \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 5: *Cho hình thang* ABCD (AB // CD), *biết* AB = 5cm, BD = 10cm, AD = 7cm *và* $D\hat{A}B = D\hat{B}C$.

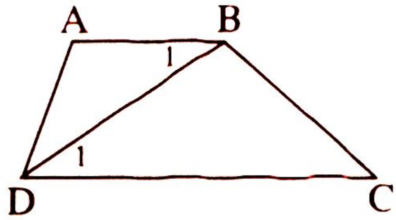
a. *Chứng minh rằng* ΔABD ∽ ΔBDC.

b. *Tính độ dài các đoạn thẳng* BC, CD.

c. *Hãy dựng hình thang* ABCD *thoả mãn điều kiện đầu bài.*

✍ *Giải*

a. Với hai tam giác ΔABD vàΔBDC, ta có nhận xét:



$$\begin{cases}\widehat{DAB} = \widehat{CBD} \\ \widehat{B}_1 = \widehat{D}_1\end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABD \backsim \Delta BDC.$$

b. Từ kết quả câu a), ta có:

$$\frac{BC}{AD} = \frac{CD}{DB} = \frac{DB}{BA} = \frac{10}{5} = 2 \Rightarrow \begin{cases}BC = 14cm \\ CD = 20cm\end{cases}.$$

Vậy ta được BC = 14cm và CD = 20cm.

c. Ta cần thực hiện theo bốn bước sau:

Phân tích: Giả sử đã dựng được hình thang ABCD thoả mãn điều kiện đầu bài.

Nhận xét rằng:

- ΔABD dựng được ngay.
- Điểm C thuộc tia Dx song song với AB sao cho CD = 20cm.

Cách dựng: Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng ΔABD biết độ dài ba cạnh.
- Dựng Dx // AB, trên Dx lấy điểm C sao cho CD = 20cm.

Khi đó, ABCD là hình thang phải dựng.

Chứng minh: *Bạn đọc tự chứng minh.*

Biện luận: Bài toán có một nghiệm hình.

Ví dụ 6: (Bài 37/tr 79 – Sgk): *Hình sgk cho biết* $\widehat{EBA} = \widehat{BDC}$.

a. *Trong hình vẽ có bao nhiêu tam giác vuông? Hãy kể tên các tam giác đó.*

b. *Cho biết* AE = 10cm, AB = 15cm, BC = 12cm. *Hãy tính độ dài các đoạn thẳng* CD, BE, BD và ED (*làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất*).

c. *So sánh diện tích tam giác* BDE *với tổng diện tích của hai tam giác* AEB *và* BCD.

✍ *Giải*

a. Ta có: ΔABE vuông tại A (gt); ΔBCD vuông tại C (gt)

$\widehat{B_1} = \widehat{D_1}$ (gt)

Mà $\widehat{D_1} + \widehat{B_3} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{B_1} + \widehat{B_2} = 90^0 \Rightarrow \widehat{B_2} = 180^0 - (\widehat{B_1} + \widehat{B_3}) = 180^0 - 90^0 = 90^0.$

Do đó, ΔEBD vuông tại B.

b. Ta có: $\frac{EA}{BC} = \frac{AB}{CD} \Leftrightarrow \frac{10}{12} = \frac{15}{CD} \Rightarrow CD = 18$ (cm).

Áp dụng định lí Pitago vào ba tam giác vuông trong câu a), ta có:

$$BE = \sqrt{AE^2 + AB^2} = \sqrt{100 + 225} \approx 18 \text{ (cm)}.$$

$$DB = \sqrt{BC^2 + CD^2} = \sqrt{12^2 + 18^2} \approx 21,6 \text{ (cm)}.$$

$$ED = \sqrt{BE^2 + BD^2} = \sqrt{325 + 468} \approx 28,2 \text{ (cm)}.$$

c. Ta có: $S_{BDE} = \frac{1}{2}BE.BD = \frac{1}{2}.18.21,6 \approx 194,4$ (cm^2).

$$S_{AEB} + S_{BCD} = \frac{1}{2}(10.15 + 12.18) = 183 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Do đó: $S_{BDE} > S_{AEB} + S_{BCD}$.

Ví dụ 7: *Cho ΔABC có ba góc nhọn, các điểm M và N theo thứ tự là trung điểm của BC và AC. Gọi H, O, G theo thứ tự là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm của ΔABC.*

a. *Tìm các tam giác đồng dạng với ΔAHB.*

b. *Chứng minh rằng $\Delta HAG \backsim \Delta OMG$.*

c. *Chứng minh rằng ba điểm H, G, O thẳng hàng.*

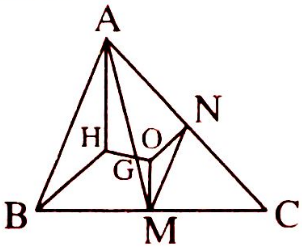
Giải

a. Ta có: MN // AB vì MN là đường trung bình của ΔABC,

AH // MO vì cùng vuông góc với BC,

BH // NO vì cùng vuông góc với AC,

từ đó suy ra các góc có cạnh tương ứng song song bằng nhau là:



$$\begin{cases} \widehat{HAB} = \widehat{OMN} \\ \widehat{BHA} = \widehat{NOM} \end{cases} \Leftrightarrow \Delta AHB \backsim \Delta MON.$$

Vậy, ta được $\Delta AHB \backsim \Delta MON$.

b. Theo câu a) ta có: $\Delta AHB \backsim \Delta MON \Rightarrow \frac{AH}{MO} = \frac{AB}{MN} = 2$.

Mặt khác, vì G là trọng tâm của ΔABC nên: $\frac{AG}{MG} = 2 = \frac{AH}{MO}$.

Xét hai tam giác ΔHAG và ΔOMG, ta có:

$$\begin{cases} \frac{AH}{MO} = \frac{AG}{MG} \\ \widehat{HAG} = \widehat{OMG} \text{ so le trong} \end{cases} \Leftrightarrow \Delta HAG \backsim \Delta OMG.$$

c. Theo câu b) ta có: $\widehat{AGH} = \widehat{MGO}$.

Mặt khác, ta có: $180^0 = \widehat{MGO} + \widehat{AGO} = \widehat{AGH} + \widehat{AGO}$

$\Rightarrow$ H, G, O thẳng hàng.

☛ ***Nhận xét***: Kết quả câu c) khẳng định "*Trực tâm, trọng tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp của một tam giác nằm trên một đường thẳng (đường thẳng Ơle)*", trong đó khoảng cách từ trọng tâm đến trực tâm gấp đôi khoảng cách từ trọng tâm đến giao điểm ba đường trung trực.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho ΔABC có AB = 2cm, BC = 4cm, CA = 3cm. Biết $\Delta A_1B_1C_1$ đồng dạng với ΔABC.

a. Tính các cạnh A_1B_1, A_1C_1, biết $B_1C_1 = 10$cm.

b. Tính các cạnh A_1B_1, B_1C_1, A_1C_1, biết $\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta ABC$ theo tỉ số bằng $\frac{1}{3}$.

Bài 2: Người ta lập hai bản đồ của một thửa ruộng hình tam giác, bản thứ nhất theo tỉ xích 1: 100, bản thứ hai theo tỉ xích 1: 50000. Tính tỉ số đồng dạng của bản đồ thứ nhất với bản đồ thứ hai.

Bài 3: Cho ΔABC. Hãy vẽ $\Delta A'B'C'$ đồng dạng với ΔABC theo tỉ số đồng dạng $k = \frac{2}{3}$.

Bài 4: Cho ΔABC đồng dạng với ΔDEF, tỉ số đồng dạng bằng $\frac{2}{3}$.

a. Tính tỉ số chu vi của hai tam giác đã cho.

b. Tính chu vi ΔDEF biết chu vi ΔABC bằng 30cm.

c. Tính chu vi của mỗi tam giác đã cho, biết hiệu chu vi của hai tam giác trên bằng 2dm.

Bài 5: $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$ theo tỉ số đồng dạng $k = \frac{3}{5}$.

a. Tính tỉ số chu vi của hai tam giác đã cho.

b. Cho biết hiệu chu vi của hai tam giác trên là 40dm, tính chu vi của mỗi tam giác.

Bài 6: Cho hình thang ABCD (AB // CD) có CD = 2AB. Gọi E là trung điểm của CD. Chứng minh rằng ba tam giác ΔADE, ΔABE, ΔBEC đồng dạng với nhau từng đôi một (Lưu ý viết các đỉnh của hai tam giác đồng dạng theo thứ tự tương ứng với nhau).

Bài 7: Cho ΔABC. Điểm D thuộc cạnh BC sao cho $\frac{DB}{DC} = \frac{1}{2}$. Kẻ DE song song với AC ($E \in AB$). Gọi M là trung điểm của AD. Gọi F là giao điểm của EM và AC.

a. ΔBED đồng dạng với tam giác nào trong hình? Tìm tỉ số đồng dạng.

b. ΔADE đồng dạng với tam giác nào trong hình? Tìm tỉ số đồng dạng.

Bài 8: (*Tính chất đường trung bình của tam giác*): Cho ΔABC. Một đường thẳng song song với BC, cắt các cạnh AB và AC theo thứ tự ở D và E. Biết rằng $DE = \frac{1}{2}BC$. Chứng minh rằng D là trung điểm của AB.

Bài 9: (*Định lí Mênêlai*): Cho ΔABC. Một đường thẳng d không đi qua các đỉn của tam giác, cắt các đường thẳng BC, AC, AB theo thứ tự ở A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng

$$\frac{AB_1}{B_1C}.\frac{CA_1}{A_1B}.\frac{BC_1}{C_1A} = 1.$$

Bài 10: (*Định lí Xêva*): Cho ΔABC. Các điểm A', B', C' theo thứ tự thuộc các cạnh BC, AC, AB sao cho AA', BB', CC' đồng quy. Chứng minh rằng $\frac{AB'}{B'C}.\frac{CA'}{A'B}.\frac{BC'}{C'A} = 1$.

Bài 11: Hai tam giác sau có đồng dạng không nêu độ dài các cạnh của chúng bằng:

a. 8cm, 12cm, 18cm và 27cm, 18cm, 12cm.

b. 3cm, 4cm, 6cm và 9cm, 15cm, 18cm.

Bài 12: Cho ΔABC vuông tại A có AB = 3cm, AC = 4cm và $\Delta A_1B_1C_1$ vuông tại A_1 có A_1B_1 = 9cm, B_1C_1 = 15cm. Hỏi rằng hai tam giác vuông ΔABC và $\Delta A_1B_1C_1$ có đồng dạng với nhau không? Vì sao?

Bài 13: Tứ giác ABCD có AB = 4cm, BC = 20cm, CD = 25cm, DA = 8cm, đường chéo BD = 10cm.

a. Các ΔABD và ΔBDC có đồng dạng không?

b. Chứng minh rằng AB song song với CD.

Bài 14: Cho ΔABC có trọng tâm G. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng GA, GB, GC.

a. Chứng minh rằng ΔMNP đồng dạng với ΔABC với tỉ số đồng dạng $k = \frac{1}{2}$.

b. Tính chu vi của ΔABC biết chu vi của ΔMNP bằng 18cm.

Bài 15: Cho ΔABC có trực tâm H. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của HA, HB, HC.

a. Chứng minh rằng ΔABC đồng dạng với ΔMNP với tỉ số đồng dạng k = 2.

b. Tính chu vi của ΔMNP biết chu vi của ΔABC bằng 78cm.

Bài 16: Cho ΔABC có AB = 8cm, AC = 10cm, BC = 12cm. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho AM = 5cm. Trên cạnh AC lấy điểm N sao cho AN = 4cm.

a. Tam giác ΔAMN đồng dạng với tam giác nào?

b. Tính độ dài đoạn MN.

Bài 17: Cho ΔABC có AB = 10cm, AC = 20cm. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho AD = 2,5cm. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho AE = 5cm.

a. Tam giác ABC đồng dạng với tam giác nào?

b. Chứng minh rằng $\widehat{ABE} = \widehat{ACB}$.

c. Tính độ dài DE, biết BE = 8cm.

Bài 18: Cho góc $\widehat{xOy}$ ($\widehat{xOy} \neq 180^0$). Trên Ox lấy hai điểm A, B sao cho OA = 3cm, OB = 6cm. Trên Oy lấy hai điểm C, D sao cho OC = 4cm, OD = 8cm.

a. Chứng minh rằng hai tam giác ΔOAD và ΔOCB đồng dạng.

b. Gọi I là giao điểm của AD và BC. Chứng minh rằng hai tam giác ΔIAB và ΔICD có các góc bằng nhau từng đôi một.

Bài 19: Cho hai tam giác $\Delta A_1B_1C_1$ và ΔABC đồng dạng với nhau theo tỉ số k. Chứng minh rằng:

a. Tỉ số của hai đường trung tuyến tương ứng của hai tam giác đó cũng bằng k.

b. Tỉ số của hai đường cao tương ứng của hai tam giác đó cũng bằng k.

c. Tỉ số của hai đường phân giác tương ứng của hai tam giác đó cũng bằng k.

Bài 20: Dựng ΔABC biết:

a. $\hat{A} = 90^0$, $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{1}{2}$ và trung tuyến AM = 4cm.

b. $\hat{A} = 60^0$, $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{2}{3}$ và đường cao AH = 3cm.

c. $\hat{A} = 30^0$, $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{4}{5}$ và phân giác AD = 5cm.

Bài 21: Cho ΔABC, các đường cao BD, CE. Chứng minh rằng:

a. $\Delta ABD \backsim \Delta ACE$.

b. $\Delta ADE \backsim \Delta ABC$.

Bài 22: Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Từ H hạ HK vuông góc với AC. Hãy vẽ hình và chỉ ra trên hình đó những tam giác đồng dạng và giải thích vì sao chúng đồng dạng?

Bài 23: Cho hình bình hành ABCD. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, CD. Chứng minh rằng $\Delta ADE \backsim \Delta CBF$.

Bài 24: Cho hình thang ABCD (AB // CD). Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD.

a. Chứng minh rằng OA.OD = OB.OC.

b. Đường thẳng qua O vuông góc với AB và cắt AB, CD theo thứ tự tại H, K. Chứng minh rằng OH.CD = OK.AB.

Bài 25: Cho ΔABC có $\widehat{A} = 2\widehat{B}$. Tính độ dài AB biết AC = 9cm, BC = 12cm.

Bài 26: Hình thang vuông ABCD có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^0$, điểm E thuộc cạnh AD. Biết AB = 10cm, AE = 15cm, DE = 12cm và $\widehat{AEB} = \widehat{BCD}$.

a. Trong hình vẽ đó hãy chỉ ra các cặp tam giác đồng dạng.

b. Chứng minh rằng $\widehat{BEC} = 90^0$.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1:

a. $A_1B_1 = 5cm$, $A_1C_1 = 7{,}5cm$. b. $A_1B_1 = \frac{2}{3}cm$, $B_1C_1 = \frac{4}{3}cm$, $A_1C_1 = 1cm$.

Bài 2: *Học sinh tự làm.*

Bài 3:

Cách dựng: Ta lần lượt:

- Dựng ΔABC bất kì.
- Dựng tia Ax nằm ngoài ΔABC.
- Trên tia Ax đặt ba đoạn thẳng liên tiếp nhau: AM = MN = NP.
- Nối P với B rồi từ N dựng NB' // PP (B' $\in$ AB).
- Từ B' dựng B'C' // BC (C' $\in$ AC).
- $\Delta AB'C'$ là tam giác cần dựng.

Chứng minh: Xét ΔAPB có: NB' // PB $\Rightarrow \frac{AN}{AP} = \frac{AB'}{AB}$.

Lại có: AM = MN = NP $\Rightarrow \frac{AN}{AP} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AB'}{AB} = \frac{2}{3}$.

Do B'C' // BC (cách dựng) $\Rightarrow \Delta AB'C' \backsim \Delta ABC \Rightarrow k = \frac{AB'}{AB} = \frac{2}{3}$.

Vậy, ta đã dựng được $\Delta AB'C'$ thoả mãn đề bài.

Bài 4: Gọi CV_1, CV2 theo thứ tự là chu vi của ΔABC và ΔDEF

a. $\frac{CV_1}{CV_2} = \frac{2}{3}$. b. $CV_2 = \frac{3}{2}CV_1 = 45cm$.

c. Từ kết quả câu a), ta có:

$$\frac{CV_1}{CV_2} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{CV_1}{CV_2 - CV_1} = \frac{2}{3-2} \Leftrightarrow \frac{CV_1}{20} = \frac{2}{1} \Leftrightarrow CV_1 = 40cm.$$

Khi đó, ta có $CV_2 = 60cm$.

Bài 5:

a. Ta có: $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C' \Rightarrow k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{3}{5}$

$$\Rightarrow \frac{A'B' + A'C' + B'C'}{AB + AC + BC} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{CV_{(A'B'C')}}{CV_{(ABC)}} = \frac{3}{5}.$$

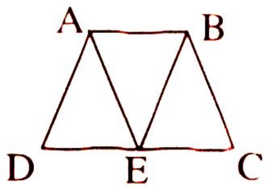
Vậy, tỉ số chu vi của hai tam giác đồng dạng bằng tỉ số đồng dạng.

b. Ta có: $\frac{CV_{(A'B'C')}}{CV_{(ABC)}} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{CV_{(A'B'C')}}{CV_{(ABC)} - CV_{(A'B'C')}} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{CV_{(A'B'C')}}{40} = \frac{3}{5}$

$$\Leftrightarrow CV_{(A'B'C')} = \frac{3}{5}.40 = 60 \text{ (dm)}$$

Do đó $CV_{(ABC)} = 40 + 60 = 100$ (dm).

Bài 6: Với giả thiết E là trung điểm CD ta lần lượt có:



- Vì: $AB \overset{//}{=} DE \Leftrightarrow ABED$ là hình bình hành $\Rightarrow AD = BE$

Khi đó, ta nhận được $\Delta ADE \backsim \Delta EBA$. (1)

- Vì: $AB \overset{//}{=} EC \Leftrightarrow ABCE$ là hình bình hành $\Rightarrow AE = BC$

Khi đó, ta nhận được $\Delta EBA \backsim \Delta BEC$. (2)

Ngoài ra từ (1) và (2), ta nhận thêm được $\Delta ADE \backsim \Delta BEC$.

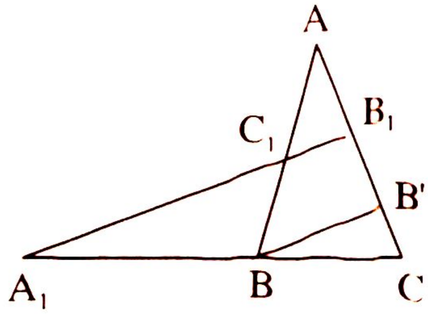
Bài 7: *Học sinh tự làm.*

Bài 8: *Học sinh tự vẽ hình*: Ta có ngay:

$$\Delta ADE \backsim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \text{D là trung điểm của AB.}$$

Bài 9: Kẻ $BB' \,//\, A_1B_1$, với $B' \in AC$.

Khi đó:



$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A}$$

$$= \frac{AB_1}{B_1B'} \cdot \frac{B_1B'}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A}$$

$$= \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1, \text{ đpcm.}$$

Bài 10: *Học sinh tự làm.*

Bài 11:

a. Hai tam giác đồng dạng với tỉ số $k = \frac{2}{3}$.

b. Hai tam giác không đồng dạng.

Bài 12: Hai tam giác vuông này có đồng dạng.

Thật vậy:

- Trong ΔABC, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow BC = 5cm.$$

- Trong $\Delta A_1B_1C_1$, ta có:

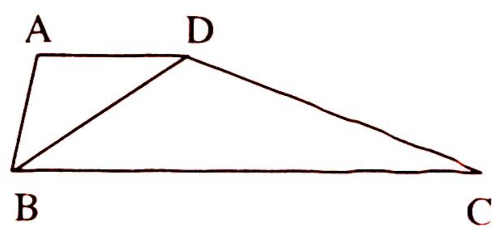
$$A_1C_1^2 = B_1C_1^2 - A_1B_1^2 = 15^2 - 9^2 = 144 \Rightarrow A_1C_1 = 12cm.$$

Khi đó, nhận thấy rằm:

$$\frac{AB}{B_1A_1} = \frac{BC}{A_1C_1} = \frac{CA}{C_1B_1} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \Delta ABC \backsim \Delta B_1A_1C_1 \text{ với tỉ số } k = \frac{1}{3}.$$

Bài 13:

a. Nhận xét rằng:



$$\frac{AB}{BD} = \frac{BD}{DC} = \frac{AD}{BC} = \frac{2}{5}$$

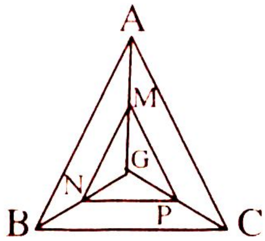
$$\Leftrightarrow \Delta ABD \backsim \Delta BDC \text{ với tỉ số } k = \frac{2}{5}.$$

b. Dựa trên kết quả của câu a), ta có ngay:

$\widehat{ABD} = \widehat{BDC} \Leftrightarrow AB // CD$ vì có hai góc so le trong bằng nhau.

Bài 14:

a. Trong ΔGAB, ta có:



$$\begin{cases} GM = AM \\ GN = BN \end{cases} \Rightarrow MN = \frac{1}{2}AB \Leftrightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{1}{2}.$$

Chứng minh tương tự, ta có: $\frac{NP}{BC} = \frac{1}{2}, \frac{PM}{CA} = \frac{1}{2}$.

Vậy ta được:

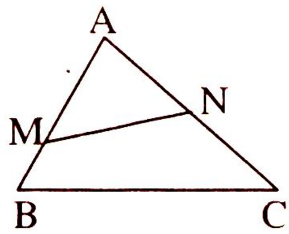
$$\frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{PM}{CA} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \Delta MNP \backsim \Delta ABC \text{ theo tỉ số } k = \frac{1}{2}.$$

b. Ta có ngay: $\frac{CV_{\Delta MNP}}{CV_{\Delta ABC}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow CV_{\Delta ABC} = 2CV_{\Delta MNP} = 36cm$.

Bài 15: $CV_{\Delta MNP} = 39cm$.

Bài 16:

a. Với hai tam giác ΔAMN và ΔABC, ta có:



$$\begin{cases} \frac{AM}{AC} = \frac{1}{2} \text{ và } \frac{AN}{AB} = \frac{1}{2} \\ \hat{A} \text{ chung} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \Delta AMN \backsim \Delta ACB$ với tỉ số đồng dạng $k = \frac{1}{2}$.

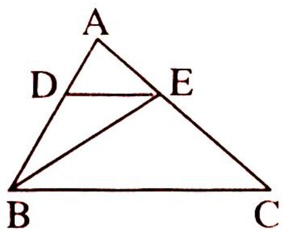
b. Theo câu a), ta có ngay:

$$\frac{MN}{CB} = \frac{AM}{AC} \Leftrightarrow MN = \frac{AM.CB}{AC} = 6cm.$$

Vậy, ta được $MN = 6cm$.

Bài 17:

a. Ta lần lượt có nhận xét:



$$\begin{cases} \frac{AD}{AB} = \frac{1}{4} \text{ và } \frac{AE}{AC} = \frac{1}{4} \\ \hat{A} \text{ chung} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \Delta ADE \backsim \Delta ABC$ với tỉ số đồng dạng $k = \frac{1}{4}$.

$$\begin{cases} \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2} \text{ và } \frac{AE}{AB} = \frac{1}{2} \\ \hat{A} \text{ chung} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \Delta ABE \backsim \Delta ACB$ với tỉ số đồng dạng $k = \frac{1}{2}$.

b. Theo kết quả: $\Delta ABE \backsim \Delta ACB \Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{ACB}$.

c. Theo các kết quả câu a), ta lần lượt có:

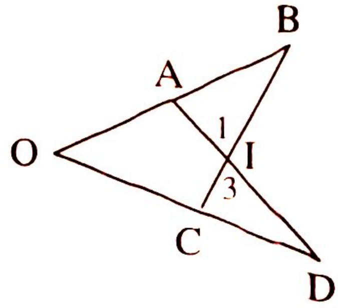
$$\Delta ABE \backsim \Delta ACB \Rightarrow \frac{BE}{CB} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow BC = 16cm.$$

$$\Delta ADE \backsim \Delta ABC \Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow DE = 4cm.$$

Vậy ta được DE = 4cm.

Bài 18:

a. Với hai tam giác ΔOAD và ΔOCB, ta có:



$$\begin{cases} \dfrac{OA}{OC} = \dfrac{3}{4} \text{ và } \dfrac{OB}{OD} = \dfrac{3}{4} \\ \widehat{O} \text{ chung} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \Delta OAD \backsim \Delta OCB \text{ với tỉ số đồng dạng } k = \frac{3}{4}.$$

b. Với hai tam giác ΔIAB và ΔICD, ta có:

$\widehat{B} = \widehat{D}$, dựa theo kết quả câu a),

$\hat{I}_1 = \hat{I}_3$, vì đối đỉnh.

$\hat{A} = \widehat{C}$, dựa trên tính chất tổng ba góc trong tam giác bằng 180^0.

Vậy, hai tam giác ΔIAB và ΔICD có các góc bằng nhau từng đôi một.

Bài 19: *Học sinh tự vẽ hình.*

a. Ta có:

$$\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$$

Suy ra:

$\hat{A} = \hat{A}'$; B = B'; C = C';

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k$$

Gọi A'M' và AM là hai trung tuyến tương ứng của hai tam giác.

Xét ΔA'B'M' và ABM, ta có:

$$\frac{B'M'}{BM} = \frac{\frac{1}{2}B'C'}{\frac{1}{2}BC} = \frac{B'C'}{BC};$$

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} \text{ (cmt)}$$

Suy ra: $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'M'}{BM}$ (vì B = B' – cmt)

Do đó, $\Delta A'B'M' \backsim ABM$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'M'}{AM} = k \text{ – đpcm.}$$

c. Ta có: $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$

$$\Rightarrow \hat{A'} = \hat{A};\ \hat{B'} = \hat{B} \text{ và } k = \frac{A'B'}{AB}$$

Gọi A'D' và AD là hai phân giác tương ứng, ta có:

$$\hat{A'_1} = \frac{\hat{A'}}{2} \text{ và } \hat{A_1} = \frac{\hat{A}}{2} \Rightarrow \hat{A'_1} = \hat{A_1}.$$

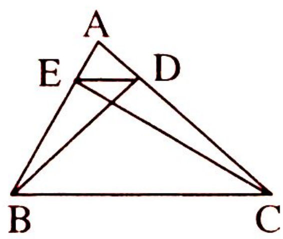
Xét $\Delta A'B'D'$ và ΔABD, ta có $\hat{A'_1} = \hat{A_1}$ và $\hat{B'} = \hat{B}$ (cmt)

Suy ra: $\Delta A'B'D' \backsim \Delta ABD$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{A'D'}{AD} = \frac{A'B'}{AB} = k \text{ – đpcm.}$$

Bài 20: *Học sinh tự làm.*

Bài 21:



a. Với hai tam giác ΔABD và ΔACE, ta có nhận xét:

$$\begin{cases} \widehat{ADB} = \hat{S} = 90^0 \\ \hat{A} \text{ chung} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \Delta ABD \backsim \Delta ACE$, đpcm.

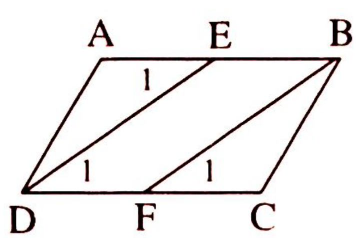
b. Từ kết quả câu a), ta được: $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} \Leftrightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$.

Khi đó, với hai tam giác ΔADE và ΔABC

$$\begin{cases} \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \\ \hat{A} \text{ chung} \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ADE \backsim \Delta ABC \text{, đpcm.}$$

Bài 22: *Học sinh tự làm.*

Bài 23: Dựa trên tính chất song song của hình bình hành, ta có:



$\hat{E}_1 = \hat{D}_1$, vì so le trong.

$\hat{D}_1 = \hat{F}_1$, vì đồng vị.

$\Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{F}_1$.

Khi đó, với hai tam giác ΔADE và ΔCBF, ta có nhận xét:

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{C} \\ \hat{E}_1 = \hat{F}_1 \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ADE \backsim \Delta CBF \text{, đpcm.}$$

Bài 24:

a. Do AB // CD (gt) nên:

$$\Delta ABB \backsim \Delta OCD \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD}. \qquad (1)$$

Từ $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} \Rightarrow OA.OD = OB.OC$ – đpcm.

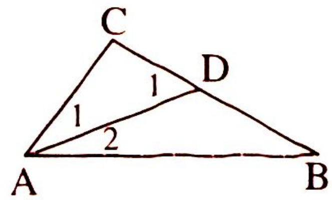
b. Tương tự, $\Delta OHA \backsim \Delta OKC$ nên $\frac{OH}{OK} = \frac{OA}{OC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{OH}{OK} = \frac{AB}{CD}$$ – đpcm.

Bài 25: Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Gọi AD là tia phân giác góc $\hat{A}$, suy ra:



- Với hai tam giác ΔACD và ΔBCA, ta có nhận xét:

$$\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{B} = \dfrac{\hat{A}}{2} \\ \hat{C} \text{ chung} \end{cases}$$

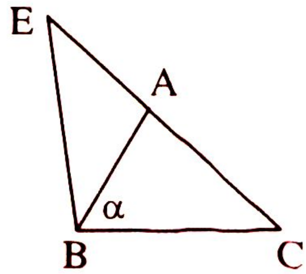
$$\Leftrightarrow \Delta ACD \backsim \Delta BCA \Rightarrow \frac{CD}{AC} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow CD = \frac{27}{4} \text{ cm.}$$

- Theo tính chất đường phân giác:

$$\frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AB = \frac{AC.BD}{CD} = \frac{AC.(BC - CD)}{CD} = 7\text{cm.}$$

Vậy, ta được AB = 7cm.

Cách 2: Trên tia đối của tia AC lấy E sao cho AE = AB.



Đặt $\hat{B} = \alpha$ thì $\hat{A} = 2\alpha$, $\hat{E} = \widehat{ABE} = \alpha$.

Đặt AB = AE = x.

Với hai tam giác ΔABC và ΔBEC, ta có:

$$\begin{cases} \hat{A} = \widehat{CBE} \\ \widehat{ABC} = \hat{E} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \Delta ABC \sim \Delta BEC \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{BC}{EC} \Rightarrow \frac{9}{12} = \frac{12}{x+9} \Rightarrow x = 7\text{cm.}$$

Vậy, ta được AB = 7cm.

CHỦ ĐỀ 4

CÁC TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG CỦA TAM GIÁC VUÔNG

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. ÁP DỤNG CÁC TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG CỦA TAM GIÁC VÀO TAM GIÁC VUÔNG

Hai tam giác vuông đồng dạng với nhau nếu:

1. Tam giác vuông này có một góc nhọn bằng góc nhọn của tam giác vuông kia.

   Thật vậy, khi đó vì chúng luôn có thêm hai góc vuông bằng nhau, nên chúng có hai góc bằng nhau.

2. Tam giác vuông này có hai cạnh góc vuông tỉ lệ với hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia.

   Thật vậy, khi đó chúng có thêm hai cạnh huyền tỉ lệ (dựa trên định lí Pi – ta–go).

2. DẤU HIỆU ĐẶC BIỆT NHẬN BIẾT HAI TAM GIÁC VUÔNG ĐỒNG DẠNG

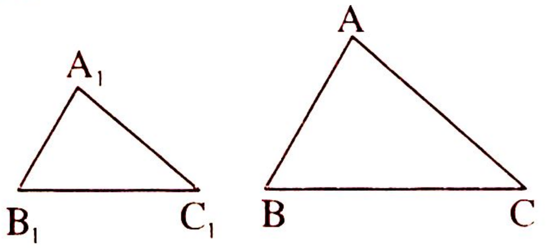
Định lí: Nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này tỉ lệ với cạnh huyền và cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó đồng dạng.

Như vậy, nếu hai tam giác vuông ΔABC và $\Delta A_1B_1C_1$ thoả mãn:

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} \Leftrightarrow \Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta ABC$$

và khi đó ta có ngay:

$$\begin{cases} \hat{C}_1 = \hat{C} \text{ và } \hat{B}_1 = \hat{B} \\ \dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{B_1C_1}{BC} = \dfrac{C_1A_1}{CA} \end{cases}$$



☞ ***Chú ý***: Kết quả của định lí trên được chứng minh một cách khác đơn giản dựa vào định lí Pi – ta – go, thật vậy:

Nếu có: $\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{B_1C_1}{BC} = k$

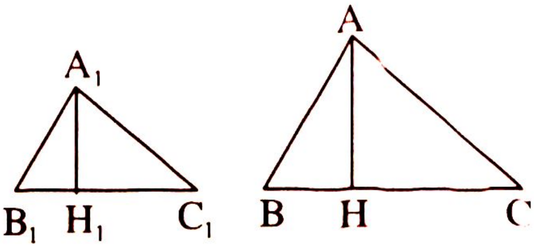
$$\Rightarrow \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{\sqrt{B_1C_1^2 - A_1B_1^2}}{\sqrt{BC^2 - AB^2}} = \frac{\sqrt{k^2BC^2 - {}^2AB^2}}{\sqrt{BC^2 - AB^2}} = k$$

Tỉ số hai đường cao, tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng

Định lí: Tỉ số hai đường cao tương ứng của hai tam giác đồng dạng bằng tỉ số đồng dạng.

Như vậy, nếu $\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta ABC$ với tỉ số k thì

$$\frac{A_1H_1}{AH} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA} = k$$



và khi đó ta có thêm:

$$\begin{cases} \dfrac{A_1H_1}{AH} = \dfrac{B_1H_1}{BH} = \dfrac{C_1H_1}{CH} \\ \widehat{B_1A_1H_1} = \widehat{BAH} \text{ và } \widehat{C_1A_1H_1} = \widehat{CAH} \end{cases}$$

***Định lí**: Tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng bằng bình phương tỉ số đồng dạng.*

Như vậy, nếu $\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta ABC$ với tỉ số k thì $\dfrac{S_{\Delta A_1B_1C_1}}{S_{\Delta ABC}} = k^2$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: (Bài 46/tr 84 – Sgk): *Trên hình sgk, hãy chỉ ra các tam giác đồng dạng. Viết các tam giác này theo thứ tự các đỉnh tương ứng và giải thích vì sao chúng đồng dạng?*

✍ *Giải*

Nhìn trên hình vẽ, ta có:

- $\Delta ABE \backsim \Delta ADC$ (vì hai tam giác vuông có góc nhọn A chung).
- $\Delta EDF \backsim \Delta EBA$ (vì hai tam giác vuông có góc nhọn E chung).
- $\Delta CBF \backsim \Delta CDA$ (vì hai tam giác vuông có góc nhọn C chung).
- $\Delta EDF \backsim \Delta CBF$ (vì hai tam giác vuông có E = C – góc có cạnh tương ứng vuông góc).
- $\Delta EDF \backsim \Delta CDA$ (vì cùng đồng dạng với ΔCBF).
- $\Delta CBF \backsim \Delta EBA$ (vì cùng đồng dạng với ΔEDF).

Ví dụ 2: *Hình thang vuông* ABCD *có* $\hat{A} = \hat{D} = 90^0$, AB = 4cm, CD = 9cm. *Tính độ dài* BD *biết rằng* BD *vuông góc với* BC.

✍ *Giải*

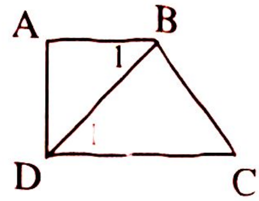
Xét hai tam giác vuông ΔABD và ΔBDC có:

$\hat{D}_1 = \hat{B}_1 \Leftrightarrow \Delta ABD \backsim \Delta BDC$

$\Rightarrow \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{BD} \Leftrightarrow BD^2 = AB.DC = 4.9 = 36$

$\Leftrightarrow BD = 6cm.$

Vậy, ta được BD = 6cm.



☞ *Nhận xét*: Như vậy, bằng việc đánh giá được $\hat{D}_1 = \hat{B}_1$ (góc nhọn trong tam giác vuông) chúng ta có ngay được kết luận ΔABD ∽ ΔBDC, từ đó dựa trên tỉ số đồng dạng giữa các cạnh chúng ta tính được độ dài cạnh BD.

Ví dụ 3: (Bài 49/tr 84 – Sgk): *Cho ΔABC vuông ở* A *và có đường cao* AH.

a. *Trong hình vẽ sgk có bao nhiêu cặp tam giác đồng dạng với nhau? (hãy chỉ rõ từng cặp tam giác đồng dạng và viết theo các đỉnh tương ứng).*

b. *Cho biết* AB = 12,45cm, AC = 20,50cm. *Tính độ dài các đoạn thẳng* BC, AH, BH *và* CH.

✍ *Giải*

a. Ta có, các cặp tam giác đồng dạng có trong hình là:

- ΔAHB ∽ ΔCAB (vì hai tam giác vuông có góc nhọn B chung).
- ΔCHA ∽ ΔCAB (vì hai tam giác vuông có góc nhọn C chung).
- ΔAHB ∽ ΔCHA (vì cùng đồng dạng với ΔCAB).

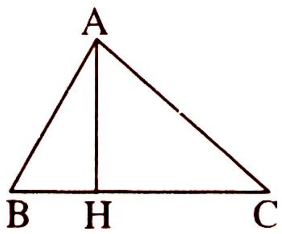
a. Áp dụng định lí Pitago vào ΔABC vuông tại A, ta có:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = (12,45)^2 + (20,5)^2 = 575,25 \Rightarrow BC \approx 23,98$ (cm).

Xét ΔAHB ∽ ΔCAB, ta có:

$$\frac{AH}{AC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AH = \frac{20,5.12,45}{23,98} \approx 10,64 \text{ (cm)}.$$

$$\frac{BH}{AB} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow HB = \frac{AB^2}{BC} \approx 6,46 \text{ (cm)}.$$



Do đó:

$CH = BC - BH = 23,98 - 6,46 = 17,53$ (cm).

Ví dụ 4: (Bài 47/tr 84 – Sgk): ΔABC *có độ dài các cạnh là* 3cm, 4cm, *và* 5cm. ΔA'B'C' *đồng dạng với* ΔABC *và có diện tích là* $54cm^2$. *Tính độ dài các cạnh của* ΔA'B'C'.

✍ *Giải*

Giả sử ΔABC có AB = 3cm, AC = 4cm, BC = 5cm, ta có:

$AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ và $BC^2 = 5^2 = 25 \Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Do đó, ΔABC vuông tại A, suy ra:

$$S_{ABC} = \frac{AB.AC}{2} = \frac{3.4}{2} = 6 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Xét ΔABC ∽ ΔA'B'C' có tỉ số đồng dạng là k, ta có:

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{54}{6} = k^2 \Rightarrow k^2 = 9 \Rightarrow k = 3$$

Mà:

$$k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} \text{ hay } \frac{A'B'}{3} = \frac{A'C'}{4} = \frac{B'C'}{5}$$

$\Rightarrow$ A'B' = 9cm, A'C' = 12cm, B'C' = 15cm.

Ví dụ 5: *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Chứng minh rằng:*

a. $AH^2 = BH.CH$.

b. $AB^2 = BH.\ BC$.

c. $AC^2 = CH.\ BC$.

Áp dụng: Đường cao của một tam giác vuông phát xuất từ đỉnh góc vuông chia cạnh huyền thành hai đoạn thẳng có độ dài 9cm và 16cm. Tính độ dài các cạnh của tam giác vuông đó.

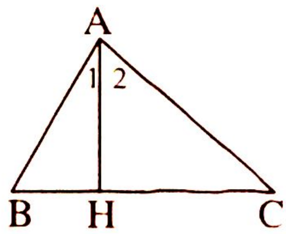
Giải

a. Xét hai tam giác vuông ΔAHB và ΔCHA, ta có:

$\hat{A}_1 = \hat{C}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc)

$\Leftrightarrow \Delta AHB \backsim \Delta CHA$

$$\Rightarrow \frac{AH}{CH} = \frac{HB}{HA} \Leftrightarrow AH^2 = BH.CH.$$



b. Xét hai tam giác vuông ΔAHB và ΔCAB, ta có:

$\hat{B}$ góc nhọn chung

$$\Leftrightarrow \Delta AHB \backsim \Delta CAB \Rightarrow \frac{AB}{CB} = \frac{HB}{AB} \Leftrightarrow AB^2 = BH.\ BC.$$

c. Xét hai tam giác vuông ΔAHC và ΔBAC, ta có:

$\hat{C}$ góc nhọn chung

$$\Leftrightarrow \Delta AHC \backsim \Delta BAC \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{HC}{AC} \Leftrightarrow AC^2 = CH.\ BC.$$

Áp dụng: Ta có BH = 9cm, CH = 16cm suy ra:

$AB^2 = BH.\ BC = 9.(16 + 9) = 225 \Rightarrow AB = 15cm$,

$AC^2 = CH.\ BC = 16.(16 + 9) = 400 \Rightarrow AC = 20cm$.

Vậy, ta được AB = 15cm, AC = 20cm.

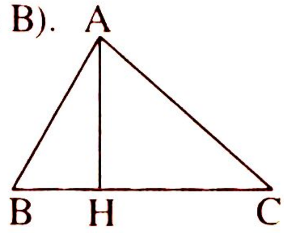
Chú ý: Các em học sinh cần nhớ những công thức được xác lập trong ví dụ này, bởi chúng ta được quyền sử dụng nó trong các bài toán tính toán của tam giác vuông.

Ví dụ 6: (Bài 52/tr 85 – Sgk): *Cho một tam giác vuông, trong đó cạnh huyền dài 20cm và cạnh góc vuông dài 12cm. Tính độ dài hình chiếu cạnh góc vuông kia trên cạnh huyền.*

✍ *Giải*

Giả sử ΔABC vuông tại A có BC = 20cm, AB = 12cm.

Kẻ đường cao AH thì CH là hình chiếu của cạnh góc vuông thứ hai AC trên cạnh huyền BC.



Ta có: $\Delta BHA \backsim \Delta BAC$ (hai tam giác vuông có chung góc B).

$$\Rightarrow \frac{BH}{AB} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{12^2}{20} = 7,2 \text{ (cm)}$$

Do đó:

$$CH = BC - BH = 20 - 7,2 = 12,8 \text{ (cm)}$$

Vậy, độ dài hình chiếu cạnh góc vuông thứ hai AC trên cạnh huyền BC là CH = 12,8cm.

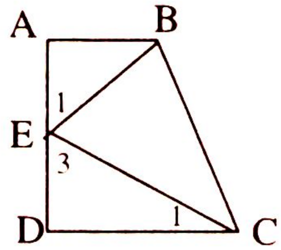
Ví dụ 7: *Hình thang vuông* ABCD *có* $\hat{A} = \hat{D} = 90^0$, AB = 6cm, CD = 12cm, AD = 17cm. *Lấy điểm* E *trên cạnh* AD *sao cho* AE = 8cm.

a. *Hỏi* ΔABE *đồng dạng với tam giác nào? Vì sao?*

b. *Chứng minh rằng* $\widehat{BEC} = 90^0$.

✍ *Giải*

a. Xét hai tam giác vuông ΔABE và ΔDEC, ta có:



$$\begin{cases} \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{AE}{DC} = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{AE}{DC} \Leftrightarrow \Delta ABD \backsim \Delta BDC.$$

b. Theo kết quả câu a), ta suy ra: $\hat{E}_1 = \hat{C}_1$.

Mặt khác, trong ΔCDE vuông tại D, ta có: $\hat{C}_1 + \hat{E}_3 = 90^0 \Leftrightarrow \hat{E}_1 + \hat{E}_3 = 90^0$.

Khi đó:

$$\widehat{BEC} = 180^0 - \hat{E}_1 + \hat{E}_3 = 180^0 - 90^0 = 90^0.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, bằng việc đánh giá được $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AE}{DC}$ (hai cạnh góc vuông tỉ lệ) chúng ta có ngay được kết luận $\Delta ABD \backsim \Delta BDC$, từ đó dựa vào sự bằng nhau giữa các góc chúng ta tính được số đo của góc $\widehat{BEC}$ – *Các em học sinh cần nhớ rằng trong bài kiểm tra thông thường câu a) không được đề cập*, điều này dẫn tới việc các em cần có được định hướng chính xác công việc cần thực hiện, cụ thể:

- Để chứng minh $\widehat{BEC} = 90^0$ ta cần chứng minh $\hat{E}_1 + \hat{E}_3 = 90^0$.

- Nhận xét rằng $\hat{E}_1$ và $\hat{E}_3$ là hai góc nhọn trong hai tam giác vuông, do vậy nếu có $\hat{E}_1 + \hat{E}_3 = 90^0$ thì $\hat{E}_1 = \hat{C}_1$, tức là khi đó hai tam giác vuông này đồng dạng.
- Từ đó, chúng ta sẽ bắt đầu bằng việc chứng minh $\Delta ABD \backsim \Delta BDC$.

Tuy nhiên, với chỉ một yêu cầu chứng minh $\widehat{BEC} = 90^0$, ta có thể sử dụng cách khác như sau:

Hạ $BH \perp CD$, suy ra ABHD là hình chữ nhật, do đó:

$$BH = AD = 17cm,$$

$$CH = CD - DH = CD - AB = 12 - 6 = 6cm.$$

Trong ΔBHC vuông tại H, ta có:

$$BC^2 = BH^2 + CH^2 = 289 + 36 = 325. \quad (1)$$

Trong ΔABE vuông tại A, ta có:

$$BE^2 = AB^2 + AE^2 = 36 + 64 = 100. \quad (2)$$

Trong ΔCDE vuông tại D, ta có:

$$CE^2 = CD^2 + DE^2 = 144 + 81 = 225. \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra:

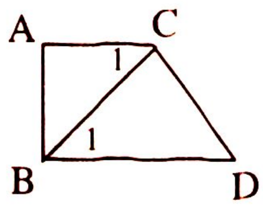
$$BC^2 = BE^2 + CE^2 \Leftrightarrow \Delta BCE \text{ vuông tại } E \Leftrightarrow \widehat{BEC} = 90^0.$$

Ví dụ 8: *Cho* ΔABC *vuông tại* A, AC = 8cm, BC = 12cm. *Kẻ tia* Cx *vuông góc với* BC. *Trên* Cx *lấy điểm* D *sao cho* BD = 18cm. *Chứng minh rằng* $\Delta ABC \backsim \Delta CDB$.

Giải

Xét hai tam giác vuông ΔABC và ΔCDB, ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{BC}{DB} = \dfrac{12}{18} = \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{AC}{CB} = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{BC}{DB} = \dfrac{AC}{CB} \Leftrightarrow \Delta ABC \backsim \Delta CDB.$$



Nhận xét: Từ kết quả:

$$\Delta ABD \backsim \Delta BDC \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_1 \Leftrightarrow AC // BD \Rightarrow ABDC \text{ là hình thang vuông.}$$

Ví dụ 9: (Bài 51/tr 84 – Sgk): *Chân đường cao* AH *của tam giác vuông* ABC *chia cạnh huyền BC thành hai đoạn thẳng có độ dài* 25cm *và* 36cm. *Tính chu vi và diện tích của tam giác vuông đó.*

Giải

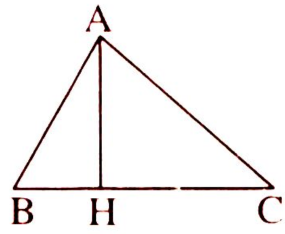
Ta có: $\Delta AHB \backsim \Delta CHA$ (vì hai tam giác vuông có A = C)

$$\Rightarrow \frac{AH}{CH} = \frac{HB}{HA} \Rightarrow AH^2 = CH.HB \Rightarrow AH = \sqrt{25.36} = 30 \text{ (cm)}.$$

Áp dụng định lí Pitago vào hai tam giác vuông AHB và AHC, ta có:

$AB = \sqrt{AH^2 + HB^2} = \sqrt{30^2 + 25^2} \approx 39,05$ (cm)

$AC = \sqrt{AH^2 + HC^2} = \sqrt{30^2 + 36^2} \approx 46,86$ (cm)



Suy ra:

$CV_{ABC} = 39,05 + 46,86 + 61 = 146,91$ (cm)

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AH.BC = \frac{1}{2}.30.61 = 915$ (cm^2).

Ví dụ 10: *Cho hình bình hành* ABCD. *Gọi hình chiếu của* A *trên* CD *là* H, *hình chiếu của* A *trên* BC *là* K.

a. *Chứng minh rằng* $\Delta AHD \backsim \Delta AKB$.

b. *Hình bình hành* ABCD *có thêm điều kiện gì thì các tam giác* AHC *và* AKC *đồng dạng với nhau?*

✍ *Giải*

a. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

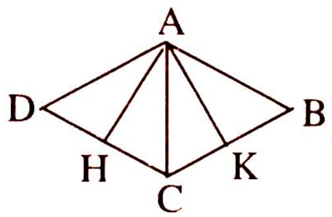
Cách 1: Xét hai tam giác vuông ΔAHD và ΔAKB, ta có:

$\hat{D} = \hat{B}$ (góc đối hình bình hành) $\Leftrightarrow \Delta AHD \backsim \Delta AKB$.

Cách 2: Ta có:

$S_{ABCD} = AH.CD = AH.AB = AK.BC = AK.AD$

$\Leftrightarrow AH.AB = AK.AD \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AH}{AK}$.



Xét hai tam giác vuông ΔAHD và ΔAKB, ta có:

$\frac{AD}{AB} = \frac{AH}{AK} \Leftrightarrow \Delta AHD \backsim \Delta AKB$.

b. Các tam giác vuông AHC, AKC đồng dạng với nhau khi và chỉ khi có một cặp góc nhọn bằng nhau, xét hai khả năng:

Khả năng 1: Với điều kiện:

$\widehat{ACH} = \widehat{ACK} \Leftrightarrow$ AC là phân giác của góc $\hat{C} \Leftrightarrow$ ABCD là hình thoi.

Khả năng 2: Với điều kiện:

$\widehat{ACH} = \widehat{CAK} \Leftrightarrow AK \parallel CD \Leftrightarrow CK \perp CD \Leftrightarrow$ ABCD là hình chữ nhật.

Ví dụ 11: (Bài 58/tr 92 – Sgk): *Cho tam giác cân* ABC (AB = AC), *vẽ các đường cao* BH, CK.

a. *Chứng minh* BK = CH.

b. *Chứng minh* KH // BC.

c. *Cho biết* BC = a, AB = AC = b. *Tính độ dài đoạn thẳng* HK.

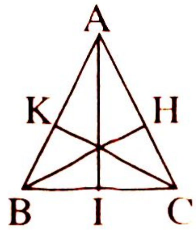
✍ *Giải*

a. Xét ΔBHC và CKB có:

BC chung;

C = B (vì ΔABC cân tại A)

$\Rightarrow \Delta BHC = \Delta CKB \Rightarrow BK = CH$ – đpcm.



b. Ta có:

AB = AC (gt)

BK = CH (cmt)

$\Rightarrow AB - BK = AC - CH \Leftrightarrow AK = AH \Rightarrow \Delta AHK$ cân tại A.

Do đó, $K_1 = B$

Vậy, KH // BC – đpcm.

c. Vẽ đường cao AI (I ∈ BC) của ΔABC cân tại A nên AI cũng là đường trung tuyến.

Suy ra, $IB = IC = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$

Xét hai tam giác vuông AIB và CKB có:

$\hat{B}$ chung

$$\Rightarrow \Delta AIB \backsim \Delta CKB \Rightarrow \frac{BI}{BK} = \frac{AB}{BC} \Leftrightarrow \frac{\frac{a}{2}}{BK} = \frac{b}{a} \Rightarrow BK = \frac{a^2}{2b}.$$

$$\Rightarrow AK = AB - BK = b - \frac{a^2}{2b} = \frac{2b^2 - a^2}{2b}$$

Trong ΔABC có KH // BC (cmt)

$$\Rightarrow \frac{AK}{AB} = \frac{KH}{BC} \Leftrightarrow \frac{\frac{2b^2 - a^2}{2b}}{b} = \frac{KH}{a} \Rightarrow KH = \frac{a(2b^2 - a^2)}{2b^2}.$$

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho ΔABC vuông tại A, AC = 4cm, BC = 6cm. Kẻ tia Cx vuông góc với BC. Trên Cx lấy điểm D sao cho BD = 9cm. Chứng minh rằng ΔABC ∽ ΔCDB.

Bài 2: Cho ΔABC có AB = AC = 32cm, BC = 24cm, đường cao BK. Tính độ dài CK.

Bài 3: Hình thang vuông ABCD có $\hat{A} = \hat{D} = 90^0$, điểm E thuộc cạnh AD. Biết AB = 5cm, BE = 10cm, CE = 15cm. Chứng minh rằng $\widehat{BEC} = 90^0$.

Bài 4: Hình thang vuông ABCD có $\hat{A} = \hat{D} = 90^0$, AB = 3cm, CD = 6cm, AD = 11cm. Lấy điểm E trên cạnh AD sao cho DE = 9cm.

a. Hỏi ΔABE đồng dạng với tam giác nào? Vì sao?

b. Chứng minh rằng $\widehat{BEC} = 90^0$.

Bài 5: Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH, biết AB = 12cm, BC = 20cm. Tính độ dài các đoạn BH, CH.

Bài 6: Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH, biết BH = 25cm, CH = 36cm.

a. Tính độ dài các cạnh của ΔABC.

b. Tính chu vi và diện tích của ΔABC.

Bài 7: Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH, biết BH = 4cm, CH = 6cm. Gọi M là trung điểm của BC.

a. Tính độ dài các cạnh của ΔABC.

b. Tính diện tích ΔAHM.

Bài 8: Cho ΔABC vuông tại A, AB = 9cm, AC = 12cm. Điểm D thuộc cạnh BC sao cho CD = 4cm. Đường vuông góc với BC tại D cắt AC ở E. Không tính độ dài DE, hãy tính diện tích ΔDEC.

Bài 9: Cho ΔABC cân tại A, đường cao BH và tam giác A'B'C' cân tại A', đường cao B'H'. Biết AB = 12cm, BH = 9cm, A'B' = 8cm, B'H' = 6cm. Tính tỉ số diện tích của các tam giác $\Delta B'H'C'$ và ΔBHC.

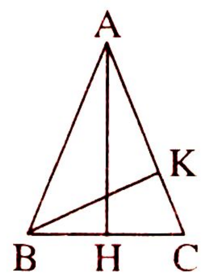
Bài 10: Cho ΔABC có ba góc nhọn, BC = 15cm, đường cao AH = 10cm. Tính cạnh hình vuông MNPQ biết M thuộc cạnh AB, N thuộc cạnh AC, P và Q thuộc cạnh BC.

Bài 11: Cho ΔABC, điểm D thuộc cạnh BC. Vẽ DM song song với AC ($M \in AB$), DN song song với AB ($N \in AC$). Biết $S_{BMD} = a^2$, $S_{DNC} = b^2$. Chứng minh rằng $S_{ABC} = (a+b)^2$.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1: *Học sinh tự làm.*

Bài 2: Hạ đường cao AH.



Xét hai tam giác vuông ΔAHC và ΔBKC, ta có:

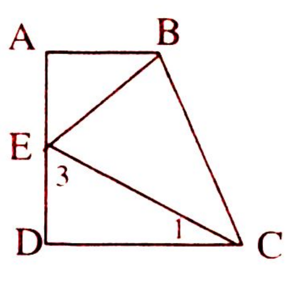
$\hat{C}$ chung

suy ra: $\Delta AHC \backsim \Delta BKC \Leftrightarrow \dfrac{HC}{KC} = \dfrac{AC}{BC} \Rightarrow KC = 9cm.$

Vậy ta tìm được KC = 9cm.

Bài 3: *Học sinh tự làm.*

Bài 4:



a. Xét hai tam giác vuông ΔABE và ΔDEC, ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{AE}{DC} = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AE}{DC} \Leftrightarrow \Delta ABD \backsim \Delta BDC.$$

b. Theo kết quả câu a), ta suy ra: $\hat{E}_1 = \hat{C}_1$.

Mặt khác, trong ΔCDE vuông tại D, ta có:

$$\hat{C}_1 + \hat{E}_3 = 90^0 \Leftrightarrow \hat{E}_1 + \hat{E}_3 = 90^0.$$

Khi đó:

$$\widehat{BEC} = 180^0 - \hat{E}_1 + \hat{E}_3 = 180^0 - 90^0 = 90^0.$$

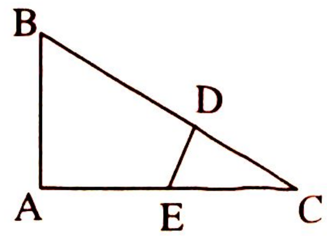
Bài 5: *Sử dụng công thức trong ví dụ 5.*

Bài 6: *Sử dụng công thức trong ví dụ 5.*

Bài 7: *Sử dụng công thức trong ví dụ 5.*

Bài 8: Xét hai tam giác vuông ΔDCE và ΔACB, ta có:

$\hat{C}$ chung



suy ra: $\Delta DCE \backsim \Delta ACB \Rightarrow \dfrac{S_{\Delta DCE}}{S_{\Delta ACB}} = \left(\dfrac{CD}{AC}\right)^2 = \dfrac{1}{9}$

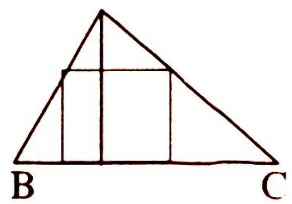
$\Rightarrow S_{\Delta DCE} = \dfrac{1}{9}.\dfrac{1}{2}AB.AC = 6cm^2.$

Vậy, ta nhận được $S_{\Delta DCE} = 6cm^2$.

Bài 9: *Học sinh tự làm.*

Bài 10: Giả sử AH cắt MN tại I và hình vuông MNPQ có cạnh bằng x, tức là: MN = IH = x.

Vì MN // BC nên



$$\Delta AMN \backsim \Delta ABC \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB}. \qquad (1)$$

Xét hai tam giác vuông ΔAMI và ΔABH, ta có:

$\hat{B}$ chung

suy ra:

$$\Delta AMI \backsim \Delta ABH \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AI}{AH}. \qquad (2)$$

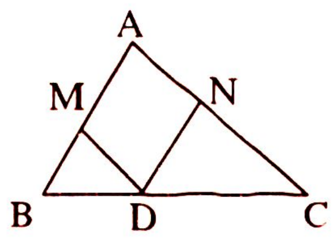
Từ (1), (2) suy ra:

$$\frac{MN}{BC} = \frac{AI}{AH} = \frac{AH - IH}{AH} \Leftrightarrow \frac{x}{15} = \frac{10 - x}{10} \Leftrightarrow x = 6cm.$$

Vậy, hình vuông MNPQ có độ dài cạnh bằng 6cm.

Bài 11: Giả sử ΔABC có diện tích là S.

Ta thấy ngay:



$\Delta BDM \backsim \Delta DCN$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta BDM}}{S_{\Delta DCN}} = \left(\frac{BD}{CD}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} \Leftrightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{a}{b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{BD}{CD + BD} = \frac{a}{b + a} \Leftrightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{a}{a + b}$$

Vì DM // AC nên

$$\Delta BDM \backsim \Delta BCA \Rightarrow \frac{S_{\Delta BDM}}{S_{\Delta BCA}} = \left(\frac{BD}{BC}\right)^2$$

$$\Rightarrow S = S_{\Delta BDM}.\frac{BC}{BD} = a^2.\left(\frac{a + b}{a}\right)^2 = (a + b)^2$$

CHỦ ĐỀ 5

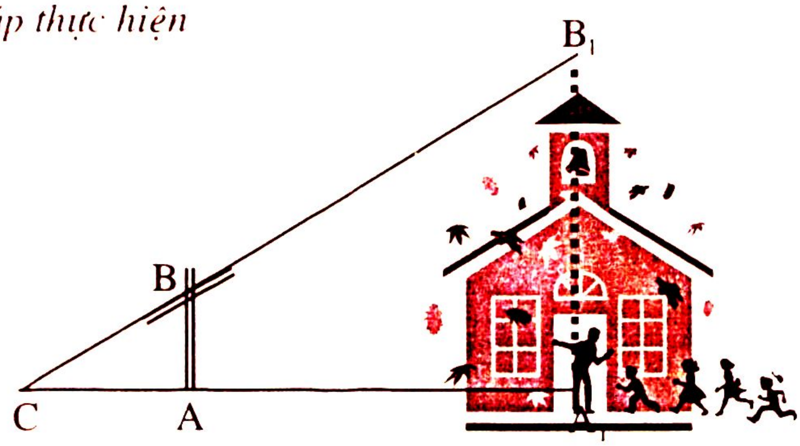
ỨNG DỤNG THỰC TẾ CỦA TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. ĐO GIÁN TIẾP CHIỀU CAO CỦA VẬT

Bài toán: Xác định chiều cao của một vật (toà nhà).

Phương pháp thực hiện



Chúng ta sẽ tiến hành theo hai bước:

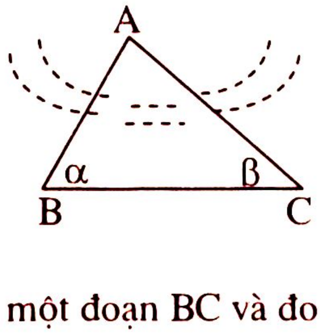
Bước 1: Tiến hành đo đạc

- Đặt cọc AB thẳng đứng trên đó có gắn một thước ngắm quay được quanh một cái chốt của cọc.
- Điều chỉnh thước ngắm sao cho hướng của thước đi qua đỉnh B_1 của toà nhà, sau đó xác định giao điểm C của đường thẳng AA_1 với BB_1.
- Đo khoảng cách AC, AA_1.

Bước 2: Tính chiều cao: Ta có:

$$\Delta A_1B_1C \backsim \Delta ABC \Rightarrow \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C}{AC} \Leftrightarrow A_1B_1 = \frac{A_1C.AB}{AC}.$$

2. ĐO KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐỊA ĐIỂM TRONG ĐÓ CÓ MỘT ĐỊA ĐIỂM KHÔNG THỂ TỚI ĐƯỢC



Bài toán: Xác định khoảng cách AB, trong đó địa điểm A không thể tới được.

Phương pháp thực hiện

Chúng ta sẽ tiến hành theo hai bước:

Bước 1: Tiến hành đo đạc

- Chọn một khoảng bằng phẳng rồi vạch một đoạn BC và đo độ dài của nó (giả sử BC = a).
- Dùng thước đo góc, đo các góc $\widehat{ABC} = \alpha$, $\widehat{ACB} = \beta$.

Bước 2: Tính khoảng cách AB

Thực hiện vẽ trên giấy $\Delta A_1B_1C_1$ thoả mãn:

$$B_1C_1 = a_1,\ \widehat{A_1B_1C_1} = \alpha,\ \widehat{A_1C_1B_1} = \beta.$$

Nhận xét rằng:

$$\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta ABC \Rightarrow \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} \Leftrightarrow AB = \frac{A_1B_1.BC}{B_1C_1}.$$

B. LUYỆN TẬP

Ví dụ 1: (Bài 53/tr 87 – Sgk): *Một người đo chiều cao của một cây nhờ một cọc chôn xuống đất, cọc cao* 2m *và đặt xa cây* 15m. *Sau khi người lùi xa cách cọc* 0,8m *thì nhìn thấy đầu cọc và đỉnh cây cùng nằm trên một đường thẳng. Hỏi cây cao bao nhiêu, biết rằng khoảng cách từ chân đến mắt người ấy là* 1,6m.

✍ *Giải*

a. Minh hoạ đề bài bằng hình vẽ, ta có:

- Chiều cao của cây là AA'
- Độ dài của cọc là BB' = 2m
- Khoảng cách từ chân đến mắt người đo là MN = 1,6m
- Khoảng cách từ cọc đến cây là A'B' = 15m.
- Khoảng cách từ người đo đến cọc là NB' = 0,8m

Từ M kẻ MK vuông góc với AA' thì cũng vuông góc với BB' tại H (vì BB' // AA').

Suy ra: MK = MK + HK = NB' + A'B' = 0,8 + 15 = 15,8 (m)

BH = BB' – HB' = BB' – MN = 2 – 1,6 = 0,4 (m)

b. Xét $\Delta MHB \backsim \Delta MKA$ (hai tam giác vuông có chung góc M)

$$\Rightarrow \frac{BH}{AK} = \frac{MH}{MK} \Rightarrow AK = \frac{BH.MK}{MH} = \frac{0,4.15,8}{0,8} = 7,9\ (m)$$

Do đó, AA' = AK + KA' = 7,9 + 1,6 = 9,5 (m)

Vậy, chiều cao của cây đo được là 9,5 mét.

Ví dụ 2: (Bài 54/tr 87 – Sgk): *Để đo khoảng cách giữa hai địa điểm* A *và* B, *trong đó* B *không tới được, người ta tiến hành đo và tính khoảng cách* AB *như hình sgk với* AB // DF; AD = m; DC = n; DF = a.

a. *Em hãy nói rõ cách đo như thế nào?*

b. *Tính độ dài x của khoảng cách* AB.

✍ *Giải*

a. Kẻ tia Ax vuông góc với AB.

Đặt trên tia Ax hai đoạn thẳng liên tiếp AD = m và DC = n.

Từ D dựng DF = a vuông góc với AC sao cho B, F, C thẳng hàng.

b. Ta đo độ dài m, n và a rồi tính độ dài x như sau:

Do DF // AB (cùng vuông góc với AC)

$$\Rightarrow \Delta CDF \backsim \Delta CAB$$

$$\Rightarrow \frac{CD}{CA} = \frac{DF}{AB}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{CA.DF}{CD} = \frac{(m+n)a}{n}$$

Vậy, ta được $x = \frac{(m+n)a}{n}$.

Ví dụ 3: (Bài 55/tr 87 – Sgk): *Hình sgk mô tả dụng cụ đo bề dày của một số loại sản phẩm. Dụng cụ này gồm thước* AC *được chia đến* 1mm *và gắn với một bản kim loại hình tam giác* ABD, *khoảng cách* BC = 10mm.

Muốn đo bề dày của vật, ta kẹp vật vào giữa bản kim loại và thước (đáy của vật áp vào bề mặt của thước AC). *Khi đó, trên thước* AC *ta đọc được "bề dày"* d *của vật (trên hình vẽ ta có:* d = 5,5m).

Hãy chỉ rõ định lí nào của hình học là cơ sở để ghi các vạch trên thước AC ($d \le 10$mm).

✍ *Giải*

Ta có: $MN \,//\, BC \Rightarrow \Delta AMN \backsim \Delta ACB$

$$\Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

$$\Rightarrow MN = \frac{AM.BC}{AC} = \frac{AM.10}{100} = \frac{1}{10}AM.$$

Do đó, khi đọc AM = 5,5cm thì đọc $MN = d = \frac{1}{10}.5,5cm = 5,5mm$.

Trong bài toán này, ta đã áp dụng định lí: "Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và song song với cạnh còn lại thì tạo thành một tam giác mới đồng dạng với tam giác đã cho" để ghi lại các vạch trên thước AC.

CHƯƠNG IV – HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG

HÌNH CHÓP ĐỀU

CHỦ ĐỀ 1

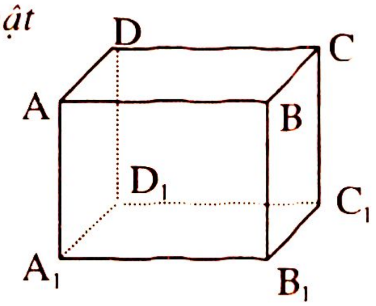
HÌNH HỘP CHỮ NHẬT

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa: ***Hình hộp chữ nhật*** *là hình có 6 mặt đều là những hình chữ nhật.*

Hình bên cho ta hình ảnh của *hình hộp chữ nhật* $ABCDA_1B_1C_1D_1$, và ở đó:



1. Hình hộp chữ nhật có:
   - 8 đỉnh, cụ thể:

     $A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1$.
   - 12 cạnh, cụ thể:

     $AB, BC, CD, DA, A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1$ – *Các cạnh đáy*

     AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 – *Các cạnh bên*
   - 6 mặt (đều là hình chữ nhật), cụ thể:

     $ABCD, A_1B_1C_1D_1, ABB_1A_1, BCC_1B_1, CDD_1C_1, ADD_1A_1$.
2. Hai mặt của hình hộp chữ nhật không có cạnh chung gọi là *hai mặt đối diện* và có thể xem chúng là *hai mặt đáy* của hình hộp chữ nhật, khi đó các mặt còn lại được xem là các *mặt bên*, cụ thể:
   - Hai mặt $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ được gọi là hai mặt đáy.
   - Bốn mặt $ABB_1A_1, BCC_1B_1, CDD_1C_1, ADD_1A_1$ được gọi là các mặt bên.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, khi cho hình hộp chữ nhật với ba kích thước a, b, c chúng ta cần hiểu rằng khi đó ta có:

$$AB = a,\ BC = b,\ AA_1 = c.$$

2. CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH, THỂ TÍCH

Với *hình hộp chữ nhật* có ba kích thước a, b, c, ta có:

- Diện tích xung quanh:

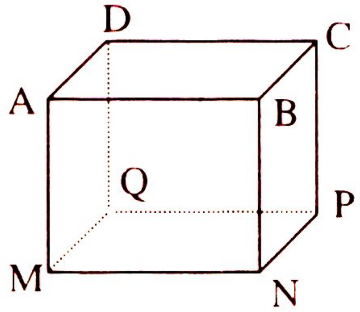
  $$S_{xq} = 2(a + b)c.$$
- Diện tích toàn phần:

  $$S_{tp} = S_{xq} + 2S_d = 2(a + b)c + 2ab = 2(ac + bc + ab).$$
- Thể tích: $V = abc$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: CHỨNG MINH CÁC TÍNH CHẤT CỦA HÌNH HỘP CHỮ NHẬT

Ví dụ 1: (Bài 1/tr 96 – Sgk): *Hãy kể tên những cạnh bằng nhau của hình hộp chữ nhật* ABCD.MNPQ.



✍ *Giải*

Ta có

AB = CD = PQ = MN;

AM = BN = CP = DQ;

AD = BC = NP = MQ.

Ví dụ 2: (Bài 2/tr 96 – Sgk): $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ *là hình hộp chữ nhật (Hình sgk).*

a. *Nếu* O *là trung điểm của đoạn* CB_1 *thì* O *có là điểm thuộc đoạn* BC_1 *không?*

b. K *là điểm thuộc cạnh* CD, *liệu* K *có thể là điểm thuộc cạnh* BB_1 *hay không?*

✍ *Giải*

a. Do BCB_1C_1 là hình chữ nhật nên hai đường chéo CB_1 và BC_1 cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Mà O là trung điểm của CB_1 nên O cũng là trung điểm của BC_1.

b. Ta có: $CD \subset mp(CDD_1C_1)$

$BB_1 \subset mp(ABB_1A_1)$

Mà $mp(CDD_1C_1) // mp(ABB_1A_1)$ (do mặt đối của hình hộp chữ nhật)

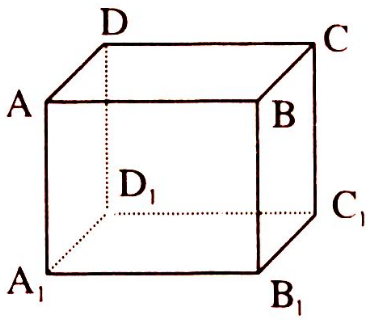
Do đó $K \in CD \Rightarrow K \notin BB_1$.

Ví dụ 3: *Cho hình hộp chữ nhật* $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

a. *Hãy chỉ ra các đường thẳng trong hình hộp song song với đường thẳng* B_1C_1.

b. *Hãy chỉ ra các mặt phẳng trong hình hộp song song với đường thẳng* AB.

c. *Hãy chỉ ra các đường thẳng trong hình hộp song song với mặt phẳng* $(A_1B_1C_1D_1)$.



✍ *Giải*

a. Ta có

- Vì BCC_1B_1 là hình chữ nhật nên: $B_1C_1 \overset{//}{=} BC$.
- Vì $A_1B_1C_1D_1$ là hình chữ nhật nên: $B_1C_1 \overset{//}{=} A_1D_1$.
- Vì ADD_1A_1 là hình chữ nhật nên: $AD \overset{//}{=} A_1D_1 \Rightarrow AD \overset{//}{=} B_1C_1$.

Vậy, tồn tại 3 đường thẳng là BC, A_1D_1 và AD song song với B_1C_1.

b. Ta có:

$AB // A_1B_1 \in (A_1B_1C_1D_1) \Rightarrow AB // (A_1B_1C_1D_1)$.

$AB // A_1B_1 \in (A_1B_1CD) \Rightarrow AB // (A_1B_1CD)$.

$AB // CD \in (CDD_1C_1) \Rightarrow AB // (CDD_1C_1)$.

Vậy, tồn tại 3 mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1)$, (A_1B_1CD) và (CDD_1C_1) song song với AB.

c. Ta có:

$AB // A_1B_1 \in (A_1B_1C_1D_1) \Rightarrow AB // (A_1B_1C_1D_1)$.

$BC // B_1C_1 \in (A_1B_1C_1D_1) \Rightarrow BC // (A_1B_1C_1D_1)$.

$CD // C_1D_1 \in (A_1B_1C_1D_1) \Rightarrow CD // (A_1B_1C_1D_1)$.

$AD // A_1D_1 \in (A_1B_1C_1D_1) \Rightarrow AD // (A_1B_1C_1D_1)$.

Ngoài ra, ta có:

$AA_1 \overset{//}{=} BB_1 \overset{//}{=} CC_1 \Leftrightarrow AA_1C_1C$ là hình bình hành

$\Leftrightarrow AC // A_1C_1 \in (A_1B_1C_1D_1) \Rightarrow AC // (A_1B_1C_1D_1)$.

$DD_1 \overset{//}{=} AA_1 \overset{//}{=} BB_1 \Leftrightarrow BB_1D_1D$ là hình bình hành

$\Leftrightarrow BD // B_1D_1 \in (A_1B_1C_1D_1) \Rightarrow BD // (A_1B_1C_1D_1)$.

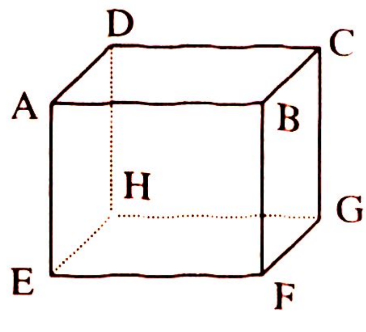
Vậy, tồn tại 6 đường thẳng AB, BC, CD, AD, AC, BD song song với mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1)$.

Ví dụ 4: (Bài 9/tr 100 – Sgk): *Cho hình hộp chữ nhật* ABCD.EFGH *có cạnh* AB *song song với mặt phẳng* (EFGH).

a. *Hãy liệt kê các cạnh khác song song với mặt phẳng* (EFGH).

b. *Cạnh* CD *song song với những mặt phẳng nào của hình hộp chữ nhật?*

✍ *Giải*



a. Ta có: $\begin{cases} GH \subset (EFGH) \\ CD \not\subset (EFGH) \\ CD // GH \end{cases} \Rightarrow CD // (EFGH)$.

Tương tự, ta có: BC // (EFGH) ; AD // (EFGH).

b. Ta có: CD // (EFGH) (cmt)

Lại có: $\begin{cases} AB \subset (ABEF) \\ CD \not\subset (ABEF) \\ CD // AB \end{cases} \Rightarrow CD // (ABEF)$.

c. Ta có: AB // GH và AB = GH ⇒ ABCD là hình bình hành ⇒ AH // BG.

Mà $BG \subset (BCGF)$ và $AH \not\subset (BCGF)$.

Vậy, ta được AH // (BCGF).

Ví dụ 5: *Cho hình hộp chữ nhật $ABCDA_1B_1C_1D_1$.*

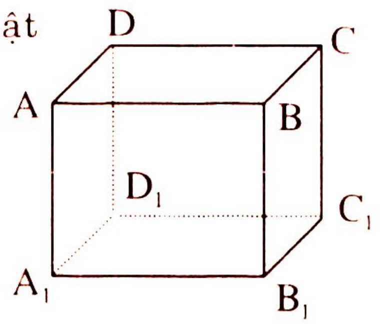
a. *Hãy chỉ ra các đường thẳng trong hình hộp vuông góc với mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1)$.*

b. *Hãy chỉ ra các mặt phẳng trong hình hộp vuông góc với mặt phẳng (BB_1C_1C).*

c. *Tứ giác B_1C_1DA là hình gì ? Vì sao ?*

✍ *Giải*

a. Ta có: $\begin{cases} AA_1 \perp A_1B_1, \text{ vì } AA_1B_1B \text{ là hình chữ nhật} \\ AA_1 \perp A_1D_1, \text{ vì } AA_1D_1D \text{ là hình chữ nhật} \end{cases}$



$\Rightarrow AA_1 \perp (A_1B_1C_1D_1)$.

Chứng minh tương tự, ta cũng có:

$BB_1 \perp (A_1B_1C_1D_1)$,

$CC_1 \perp (A_1B_1C_1D_1)$,

$DD_1 \perp (A_1B_1C_1D_1)$.

Vậy, tồn tại 4 đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 vuông góc với mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1)$.

b. Ta có:

$$\begin{cases} A_1B_1 \perp (BB_1C_1C) \\ A_1B_1 \in (A_1B_1C_1D_1) \end{cases} \Rightarrow (A_1B_1C_1D_1) \perp (BB_1C_1C).$$

$$\begin{cases} A_1B_1 \perp (BB_1C_1C) \\ A_1B_1 \in (A_1B_1BA) \end{cases} \Rightarrow (A_1B_1BA) \perp (BB_1C_1C).$$

$$\begin{cases} A_1B_1 \perp (BB_1C_1C) \\ A_1B_1 \in (A_1B_1CD) \end{cases} \Rightarrow (A_1B_1CD) \perp (BB_1C_1C).$$

$$\begin{cases} AB \perp (BB_1C_1C) \\ AB \in (ABCD) \end{cases} \Rightarrow (ABCD) \perp (BB_1C_1C).$$

$$\begin{cases} AB \perp (BB_1C_1C) \\ AB \in (ABC_1D_1) \end{cases} \Rightarrow (ABC_1D_1) \perp (BB_1C_1C).$$

$$\begin{cases} CD \perp (BB_1C_1C) \\ CD \in (CDD_1C_1) \end{cases} \Rightarrow (CDD_1C_1) \perp (BB_1C_1C).$$

Vậy, tồn tại 6 mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1)$, (A_1B_1BA), (A_1B_1CD), $(ABCD)$, (ABC_1D_1), (CDD_1C_1) vuông góc với mặt phẳng (BB_1C_1C).

c. Vì ADD_1A_1 là hình chữ nhật nên:

$$AD \overset{//}{=} A_1D_1 \overset{//}{=} B_1C_1 \Rightarrow AD \overset{//}{=} B_1C_1 \Leftrightarrow B_1C_1DA \text{ là hình bình hành.}$$

Mặt khác, ta có: $B_1C_1 \perp (CDD_1C_1) \Rightarrow B_1C_1 \perp C_1D \Leftrightarrow \widehat{B_1C_1D} = 90^0$.

Vậy, hình bình hành B_1C_1DA có một góc vuông nên nó là hình chữ nhật.

Ví dụ 6: (Bài 10/tr 103 – Sgk): *Hình trong sgk.*

1. *Gấp hình* a) *theo các nét đã chỉ ra thì có được một hình hộp chữ nhật hay không?*
2. *Kí hiệu các đỉnh hình hộp gấp được như hình* b)
   a. *Đường thẳng* BF *vuông góc với những mặt phẳng nào?*
   b. *Hai mặt phẳng* (AEHD) *và* (CGHD) *vuông góc với nhau, vì sao?*

✍ *Giải*

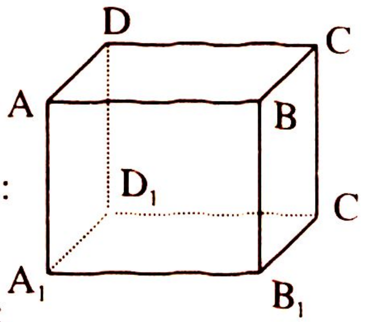
a. Ta có: ABEF và BCGF là các hình chữ nhật.
Suy ra, BF ⊥ AB và BF ⊥ BC.
Lại có: AB và BC đều thuộc (ABCD) và cắt nhau tại B.
Do đó: BF ⊥ (ABCD).
Tương tự, BF ⊥ (EFGH).
Vậy, BF vuông góc với hai mặt phẳng (ABCD) và (EFGH).

b. Ta có: (AEHD) ⊥ (CGHD).
Lại có, AD cùng vuông góc với hai đường thẳng DC và DH ⊂ (CGHD) và AD ⊄ (CGHD). Do đó: AD ⊥ (CGHD). Mà AD⊂ (AEHD).
Vậy, ta được (AEHD) ⊥ (CGHD).

Vấn đề 2: TÍNH TOÁN CÁC YẾU TỐ CỦA HÌNH HỘP CHỮ NHẬT

Ví dụ 1: (Bài 3/tr 97 – Sgk): *Các kích thước của hình hộp chữ nhật* $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ *là* CD = 5cm, CB = 4cm, BB_1 = 3cm. *Hỏi độ dài* DC_1 *và* CB_1 *là bao nhiêu xentimét?*

✍ *Giải*



Do $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ là hình chữ nhật nên:
$CC_1 = BB_1 = 3$cm.
Áp dụng định lí Pitago vào ΔCDC_1 vuông tại C, ta có:
$$DC_1 = \sqrt{DC^2 + CC_1^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} \approx 5{,}83 \text{ cm}.$$
Áp dụng định lí Pitago vào ΔBCB_1 vuông tại B, ta có:
$$CB_1 = \sqrt{BC^2 + BB_1^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ cm}.$$

Ví dụ 2: (Bài 11.a /tr 104 – Sgk): *Tính các kích thước của một hình hộp chữ nhật, biết rằng chúng tỉ lệ với* 3, 4, 5 *và thể tích của hình hộp này là* 480m^3.

✍ *Giải*

Gọi a, b, c là các kích thước của hình hộp chữ nhật (đơn vị: cm)
Theo đề bài, ta có: $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = k \Rightarrow k^3 = \frac{a.b.c}{3.4.5} = \frac{480}{60} = 8 \Rightarrow k = 2.$
Suy ra: a = 6 ; b = 8 ; c = 10.
Vậy, các kích thước của hình hộp chữ nhật là: a = 6cm, b = 8cm, c = 10cm.

Ví dụ 3: *Cho hình hộp chữ nhật có chiều dài bằng 6cm, chiều rộng bằng $\frac{1}{2}$ chiều dài và chiều cao gấp 3 lần chiều rộng. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình hộp chữ nhật đó.*

✍ *Giải*

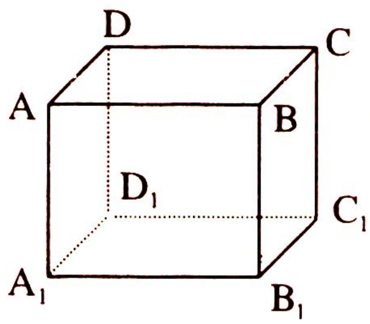
Để tính được diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình hộp chữ nhật, ta cần biết đầy đủ ba kích thước của nó là *chiều dài, chiều rộng, chiều cao*, từ giả thiết ta có: $a = 6cm$, $b = \frac{1}{2}a = 3cm$, $c = 3b = 9cm$.

Khi đó:

- Diện tích xung quanh hình hộp chữ nhật là:
  $$S_{xq} = 2(a + b).c = 162cm^2.$$
- Diện tích toàn phần hình hộp chữ nhật là:
  $$S_{tp} = S_{xq} + 2S_d = 162 + 2.6.3 = 198cm^2.$$
- Thể tích hình hộp chữ nhật là:
  $$V = a.b.c = 162cm^3.$$

Ví dụ 4: *Cho hình hộp chữ nhật* $ABCDA_1B_1C_1D_1$, *biết* $AB = a$, $BC = b$, $AA_1 = c$. *Tìm mối liên hệ giữa các đại lượng* a, b, c *để tứ giác* AA_1C_1C *là hình vuông.*

✍ *Giải*



Ta có:

$$AA_1 \overset{//}{=} BB_1 \overset{//}{=} CC_1 \Rightarrow AA_1 \overset{//}{=} CC_1$$
$$\Leftrightarrow AA_1C_1C \text{ là hình bình hành.}$$

Ta lại có:

$$AA_1 \perp (ABCD) \Rightarrow AA_1 \perp A_1C_1$$
$$\Leftrightarrow A\hat{A}_1C_1 = 90^0.$$

Khi đó, hình bình hành AA_1C_1C có một góc vuông nên nó là hình chữ nhật.

Để AA_1C_1C là hình vuông điều kiện là:

$$AA_1 = AC \Leftrightarrow AA_1^2 = AC^2 = AB^2 + BC^2 \Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2.$$

Vậy, để AA_1C_1C là hình vuông điều kiện là $c^2 = a^2 + b^2$.

Ví dụ 5: (Bài 7/tr 100 – Sgk): *Một căn phòng dài* 4,5m, *rộng* 3,7m *và cao* 3,0m. *Người ta muốn quét vôi trần nhà và bốn bức tường. Biết rằng tổng diện tích các cửa là* $5{,}8m^2$. *Tính diện tích quét vôi.*

✍ *Giải*

Diện tích trần nhà là: $S_1 = 4{,}5 \times 3{,}7 = 16{,}65\ (m^2)$.

Diện tích một mặt của bốn bức tường là: $S_2 = (4{,}5.3 + 3{,}7.3).2 = 49{,}2\ (m^2)$.

Diện tích cần quét vôi là: $S = (S_1 + S_2) - 5{,}80 = 60{,}05\ (m^2)$.

Ví dụ 6: (Bài 14/tr 104 – Sgk): *Một bể nước hình chữ nhật có chiều dài* 2m. *Lúc đầu bể không có nước. Sau khi đổ vào bể* 120 *thùng nước, mỗi thùng chứa* 20 lít *thì mực nước của bể cao* 0,8m.

a. *Tính chiều rộng của bể nước.*

b. *Người ta đổ thêm vào bể* 60 *thùng nước nữa thì đầy bể. Hỏi bể cao bao nhiêu mét?*

Giải

a. Lượng nước đổ vào bể lúc đầu là: $V_1 = 120.20 = 2400$ (lít) = 2,4 (m^3)

Diện tích đáy của bể là: $S = \frac{V_1}{h} = \frac{2,4}{0,8} = 3$ (m^3).

Đáy bể là hình chữ nhật nên: $S_{đáy}$ = dài × rộng

Suy ra, chiều rộng của đáy bể là: $\frac{S_{đáy}}{\text{chiều dài}} = \frac{3}{2} = 1,5$ (m).

b. Lượng nước đổ vào bể cả hai lần là:

$V = (120 + 60).20 = 3600$ (lít) = 3,6 (m^3).

Vậy, chiều cao của bể là: $h = \frac{V}{S} = \frac{3,6}{3} = 1,2$ (m).

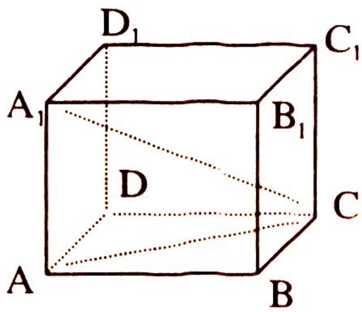
Ví dụ 7: *Cho hình hộp chữ nhật* $ABCDA_1B_1C_1D_1$. *Biết* AB = 4cm, AC = 5cm *và* A_1C = 13cm. *Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình hộp chữ nhật đó.*

Giải

Để tính được diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình hộp chữ nhật, ta cần biết đầy đủ ba kích thước của nó là *chiều dài, chiều rộng, chiều cao*. Do vậy, ở đây cần tính thêm BC và AA_1.

Áp dụng định lí Pitago vào ΔABC, ta được:

$BC = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$cm.



Từ định nghĩa của hình hộp chữ nhật, ta có:

$AA_1 \perp (ABCD) \Rightarrow AA_1 \perp AC$

$\Leftrightarrow \Delta A_1AC$ vuông tại A.

Áp dụng định lí Pitago vào ΔA_1AC, ta được:

$AA_1 = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$cm.

Khi đó:

- Diện tích xung quanh hình hộp chữ nhật là:

  $S_{xq} = 2(AB + BC).AA_1 = 168cm^2$.

- Diện tích toàn phần hình hộp chữ nhật là:

  $S_{tp} = S_{xq} + 2S_đ = 168 + 2.4.3 = 192cm^2$.

- Thể tích hình hộp chữ nhật là:

  $V = AB.BC.AA_1 = 144cm^3$.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho hình hộp chữ nhật $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Hãy nêu tên các hình chữ nhật có 4 đỉnh là 4 đỉnh của hình hộp.

Bài 2: Cho hình hộp chữ nhật $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

a. Hãy chỉ ra các đường thẳng trong hình hộp song song với đường thẳng BC.

b. Hãy chỉ ra các mặt phẳng trong hình hộp song song với đường thẳng CD.

c. Hãy chỉ ra các đường thẳng trong hình hộp song song với mặt phẳng (AA_1B_1B).

Bài 3: Cho hình hộp chữ nhật $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

a. Hãy chỉ ra các đường thẳng trong hình hộp vuông góc với (BCB_1C_1).

b. Hãy chỉ ra các mặt phẳng trong hình hộp vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

c. Tứ giác AA_1C_1C là hình gì ? Vì sao ?

Bài 4: Cho hình hộp chữ nhật $ABCDA_1B_1C_1D_1$, biết AB = 6cm, BC = 8cm, $AA_1 = x$.

a. Chứng minh rằng AA_1C_1C là hình chữ nhật.

b. Tính diện tích của tứ giác AA_1C_1C.

c. Tìm x để tứ giác AA_1C_1C là hình vuông.

Bài 5: Cho hình hộp chữ nhật có chiều dài bằng 6cm, chiều rộng bằng $\frac{2}{3}$ chiều dài và chiều cao bằng $\frac{3}{4}$ lần chiều rộng. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình hộp chữ nhật đó.

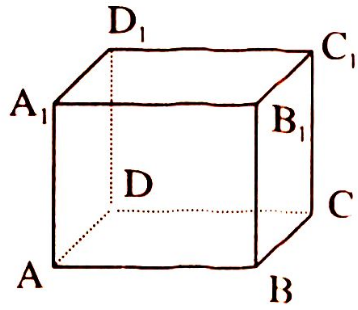
Bài 6: Cho hình hộp chữ nhật có chiều dài, chiều rộng và chiều cao tỉ lệ thoả mãn a : b : c = 4 : 2: 1. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật đó, biết thể tích của nó bằng $216cm^3$.

Bài 7: Cho hình hộp chữ nhật $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Biết AB = 6cm, AC = 10cm và $A_1C = 5\sqrt{5}$ cm. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình hộp chữ nhật đó.

Bài 8: Cho hình hộp chữ nhật $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Biết AB = 3cm, AA_1 = 6cm và $S_{AA_1C_1C} = 30cm^2$. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình hộp chữ nhật đó.

Bài 9: Cho hình hộp chữ nhật $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Biết AB = 8cm, BC = 2cm và $S_{A_1D_1CB} = 16cm^2$. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình hộp chữ nhật đó.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ



Bài 1: *Học sinh tự làm.*

Bài 2:

a. BC song song với các đường thẳng AD, A_1D_1, B_1C_1.

b. CD song song với các mặt phẳng:

AA_1B_1B, $A_1B_1C_1D_1$, ABC_1D_1.

c. Mặt phẳng (AA_1B_1B) song song với các đường thẳng:

CD, C_1D_1.

Bài 3: *Học sinh tự làm.*

Bài 4:

a. Ta có:

$$AA_1 \overset{//}{=} BB_1 \overset{//}{=} CC_1 \Rightarrow AA_1 \overset{//}{=} CC_1 \Leftrightarrow AA_1C_1C \text{ là hình bình hành.}$$

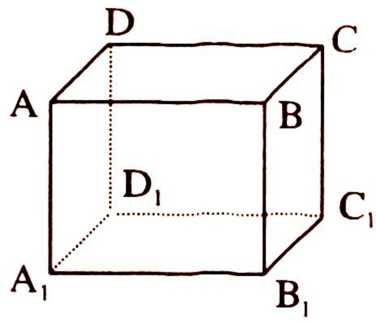
Ta lại có:

$$AA_1 \perp (ABCD) \Rightarrow AA_1 \perp A_1C_1 \Leftrightarrow \widehat{AA_1C_1} = 90^0.$$

Khi đó, hình bình hành AA_1C_1C có một góc vuông nên nó là hình chữ nhật.

b. Gọi S là diện tích của hình chữ nhật AA_1C_1C, ta có:

$$S = AA_1.AC.$$



Trong ΔABC, ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 100 \Leftrightarrow AC = 10cm.$$

Khi đó $S = 10x$.

c. Để AA_1C_1C là hình vuông điều kiện là:

$$AA_1 = AC \Leftrightarrow x = 10cm.$$

Vậy, để AA_1C_1C là hình vuông điều kiện là $x = 10cm$.

Bài 5: Từ giả thiết ta có $a = 6cm$, $b = 4cm$, $c = 3cm$.

Khi đó:

- Diện tích xung quanh hình hộp chữ nhật là:

$$S_{xq} = 2(a + b).c = 60cm^2.$$

- Diện tích toàn phần hình hộp chữ nhật là:

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_đ = 60 + 2.6.4 = 108cm^2.$$

- Thể tích hình hộp chữ nhật là:

$$V = a.b.c = 72cm^3.$$

Bài 6: Từ giả thiết ta có:

$$\frac{a}{4} = \frac{b}{2} = \frac{c}{1} \Rightarrow a = 4c, b = 2c.$$

Thể tích hình hộp chữ nhật là:

$$V = a.b.c \Leftrightarrow 216 = 4c.2c.c \Leftrightarrow c^3 = 27 \Leftrightarrow c = 3cm \Rightarrow a = 12,\ b = 6.$$

Khi đó:

- Diện tích xung quanh hình hộp chữ nhật là:

$$S_{xq} = 2(a + b).c = 08cm^2.$$

- Diện tích toàn phần hình hộp chữ nhật là:

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_đ = 60 + 2.12.6 = 252cm^2.$$

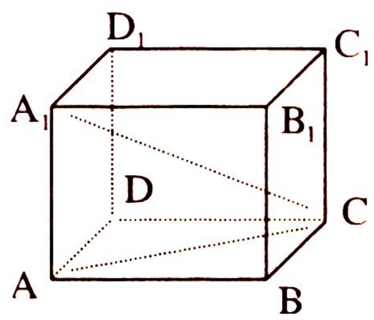
Bài 7: Để tính được diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình hộp chữ nhật, ta cần biết đầy đủ ba kích thước của nó là *chiều dài, chiều rộng, chiều cao*. Do vậy, ở đây cần tính thêm BC và AA_1.

Áp dụng định lí Pitago vào ΔABC, ta được $BC = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8cm$.

Từ định nghĩa của hình hộp chữ nhật, ta có:

$$AA_1 \perp (ABCD) \Rightarrow AA_1 \perp AC \Leftrightarrow \Delta A_1AC \text{ vuông tại } A.$$

Áp dụng định lí Pitago vào ΔA_1AC, ta được: $AA_1 = \sqrt{(5\sqrt{5})^2 - 10^2} = 5cm$.



Khi đó:

- Diện tích xung quanh hình hộp chữ nhật là:

$$S_{xq} = 2(AB + BC).AA_1 = 140cm^2.$$

- Diện tích toàn phần hình hộp chữ nhật là:

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_đ = 140 + 2.6.8 = 236cm^2.$$

- Thể tích hình hộp chữ nhật là:

$$V = AB.BC.AA_1 = 240cm^3.$$

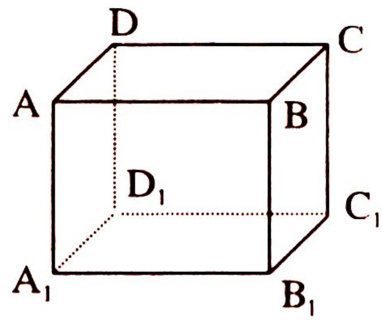
Bài 8: Ta có: $AA_1 \overset{//}{=} BB_1 \overset{//}{=} CC_1 \Rightarrow AA_1 \overset{//}{=} CC_1 \Leftrightarrow AA_1C_1C$ là hình bình hành.

Ta lại có: $AA_1 \perp (ABCD) \Rightarrow AA_1 \perp A_1C_1 \Leftrightarrow \widehat{AA_1C_1} = 90^0$.

Khi đó, hình bình hành AA_1C_1C có một góc vuông nên nó là hình chữ nhật.

Gọi S là diện tích của hình chữ nhật AA_1C_1C, ta có:

$$S = AA_1.AC \Leftrightarrow 30 = 6.AC \Leftrightarrow AC = 5cm.$$



Áp dụng định lí Pitago vào ΔABC, ta được:

$$BC = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4cm.$$

Khi đó:

- Diện tích xung quanh hình hộp chữ nhật là:

$$S_{xq} = 2(AB + BC).AA_1 = 84cm^2.$$

- Diện tích toàn phần hình hộp chữ nhật là:

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_đ = 84 + 2.3.4 = 108cm^2.$$

- Thể tích hình hộp chữ nhật là $V = AB.BC.AA_1 = 72cm^3$.

Bài 9: *Thực hiện tương tự bài tập 8.*

CHỦ ĐỀ 2

HÌNH LẬP PHƯƠNG

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. ĐỊNH NGHĨA

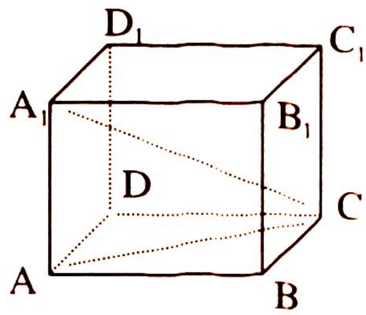
Định nghĩa*: *Hình lập phương *là hình có 6 mặt đều là những hình vuông.*

☛ ***Nhận xét***: Như vậy, khi cho hình lập phương người ta thường phát biểu "*Cho hình lập phương cạnh bằng a*".

2. CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH, THỂ TÍCH

Với *hình lập phương* có cạnh bằng a, ta có:

- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 4a^2$.
- Diện tích toàn phần: $S_{tp} = 6a^2$.
- Thể tích: $V = a^3$.



B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: CHỨNG MINH CÁC TÍNH CHẤT CỦA HÌNH LẬP PHƯƠNG

Ví dụ 1: *Cho hình lập phương* $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

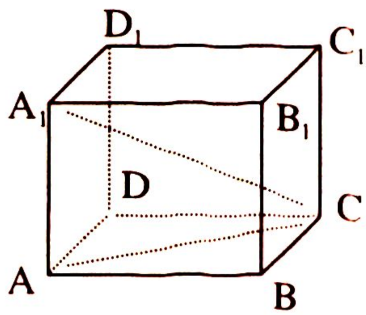
a. *Khi nối* A_1 *với* C *và* A *với* C_1 *thì hai đường thẳng* A_1C *và* AC_1 *có cắt nhau hay không ? Và nếu chúng cắt nhau thì có thể vuông góc với nhau được không ? Vì sao ?*

b. *Câu hỏi tương tự như câu* a) *với* A_1C *và* B_1D.

c. *Đường thẳng* AC *song song với những mặt phẳng nào ?*

d. *Đường thẳng* AC *vuông góc với những mặt phẳng nào ?*

✍ *Giải*



a. Ta có:

$AA_1 \overset{//}{=} BB_1 \overset{//}{=} CC_1 \Rightarrow AA_1 \overset{//}{=} CC_1$

$\Leftrightarrow AA_1C_1C$ là hình bình hành

$\Rightarrow A_1C$ và AC_1 cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Giả sử A_1C, AC_1 vuông góc với nhau, khi đó:

AA_1C_1C là hình thoi $\Leftrightarrow AA_1 = A_1C_1 \Leftrightarrow a = a\sqrt{2}$, mâu thuẫn.

Vậy, A_1C và AC_1 không thể vuông góc với nhau.

b. *Bạn đọc tự làm.*

c. Ta có:

$AC // A_1C_1 \in (A_1B_1C_1D_1) \Rightarrow AC // (A_1B_1C_1D_1)$.

$AC // A_1C_1 \in (A_1C_1B) \Rightarrow AC // (A_1C_1B)$.

$AC // A_1C_1 \in (A_1C_1D) \Rightarrow AC // (A_1C_1D)$.

Vậy, tồn tại 3 mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1)$, (A_1C_1B), (A_1C_1D) song song với AC.

d. Ta có: $\begin{cases} AC \perp BB_1 \text{ vì } BB_1 \perp (ABCD) \\ AC \perp BD \text{ vì } ABCD \text{ là hình vuông} \end{cases} \Rightarrow AC \perp (BDD_1B_1)$.

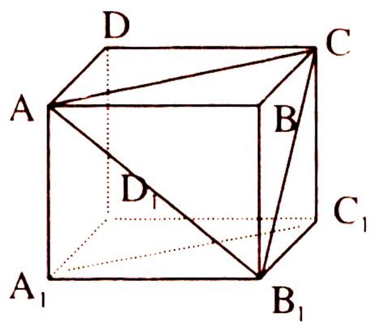
Vậy, có đúng mặt phẳng (BDD_1B_1) vuông góc với AC.

Ví dụ 2: *Cho hình lập phương* $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

a. *Chứng minh rằng* $(AB_1C) // (A_1C_1D)$.

b. *Gọi O là giao điểm của AC và BD. Gọi* O_1 *là giao điểm của* A_1C_1 *và* B_1D_1. *Các đường thẳng* AO_1 và OC_1 *cắt* A_1C *theo thứ tự tại M, N. Chứng minh rằng* $A_1M = MN = NC$.

✍ *Giải*



a. Ta có: $AA_1 \overset{//}{=} BB_1 \overset{//}{=} CC_1 \Rightarrow AA_1 \overset{//}{=} CC_1$

$\Leftrightarrow AA_1C_1C$ là hình bình hành

$\Rightarrow AC // A_1C_1$. (1)

Mặt khác, ta cũng có:

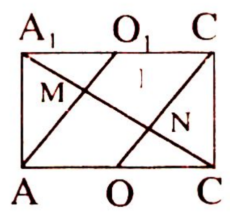
$AB \overset{//}{=} CD \overset{//}{=} C_1D_1 \Rightarrow AB \overset{//}{=} C_1D_1$

$\Leftrightarrow ABC_1D_1$ là hình bình hành

$\Rightarrow BC_1 // AD_1$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $(AB_1C) // (A_1C_1D)$.

b. Ta có: $OA \overset{//}{=} O_1C_1 \Leftrightarrow AOC_1O_1$ là hình bình hành $\Rightarrow AO_1 // OC_1$.



Trong ΔNA_1C_1, ta có:

$\begin{cases} A_1O_1 = C_1O_1 \\ O_1M // C_1N \end{cases} \Rightarrow A_1M = MN.$ (3)

Trong ΔMAC, ta có:

$\begin{cases} AO = CO \\ ON // AM \end{cases} \Rightarrow CN = MN.$ (4)

Từ (3), (4) suy ra $A_1M = MN = NC$.

Vấn đề 2: TÍNH TOÁN CÁC YẾU TỐ CỦA HÌNH LẬP PHƯƠNG

Ví dụ 1: (Bài 11.b /tr 104 – Sgk): *Diện tích toàn phần của một hình lập phương là* $486m^2$. *Thể tích của nó là bao nhiêu?*

✍ *Giải*

Hình lập phương có 6 mặt là hình vuông bằng nhau.

Gọi a là cạnh của hình vuông (đơn vị: mét).

Ta có, diện tích của hình vuông là: $a^2 = 486 : 6 = 81\ (m^2) \Rightarrow a = 9\ (m)$.

Vậy, thể tích của khối lập phương là: $V = a^3 = 9^3 = 729m^2$.

Ví dụ 2: *Cho hình lập phương* $ABCDA_1B_1C_1D_1$, *biết* $AC = 2\sqrt{2}$ cm. *Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình hộp chữ nhật đó.*

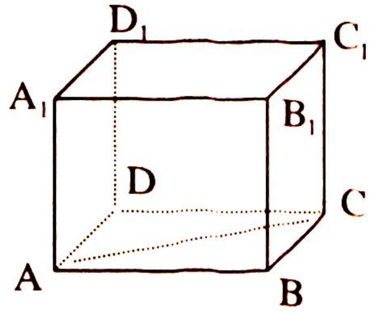
✍ *Giải*

Để tính được diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình lập phương, ta cần biết số đo cạnh của nó.

Giả sử hình lập phương có cạnh bằng a.

Trong ΔABC vuông cân tại B, ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Leftrightarrow 8 = a^2 + a^2 \Leftrightarrow a = 2cm.$$



Khi đó, hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$ có:

- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 4a^2 = 4.2^2 = 16cm^2$.
- Diện tích toàn phần: $S_{tp} = 6a^2 = 6.2^2 = 24cm^2$.
- Thể tích: $V = a^3 = 2^3 = 8cm^3$.

Ví dụ 3: *Cho hình lập phương* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *có diện tích mặt chéo* ACC_1A_1 *bằng* $9\sqrt{2}$ cm^2. *Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình lập phương đó.*

✍ *Giải*

Để tính được diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình lập phương, ta cần biết số đo cạnh của nó.

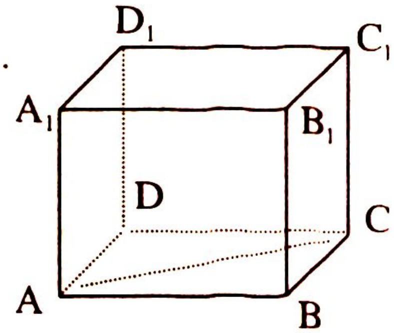
Giả sử hình lập phương có cạnh bằng a.

Trong ΔABC vuông cân tại B, ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Leftrightarrow AC = a\sqrt{2}.$$

Diện tích mặt chéo ACC_1A_1 được cho bởi:

$$S = AA_1.AC \Leftrightarrow 9\sqrt{2} = a.a\sqrt{2} \Leftrightarrow a = 3cm.$$



Khi đó, hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$ có:

- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 4a^2 = 4.3^2 = 36cm^2$.
- Diện tích toàn phần: $S_{tp} = 6a^2 = 6.3^2 = 54cm^2$.
- Thể tích: $V = a^3 = 3^3 = 27cm^3$.

Ví dụ 4: (Bài 15/tr 105 – Sgk): *Một cái thùng hình lập phương, cạnh* 7dm, *có chứa nước với độ sâu của nước là* 4dm. *Người ta thả* 25 *viên gạch có chiều dài* 2dm, *chiều rộng* 1dm *và chiều cao* 0,5dm *vào thùng. Hỏi nước trong thùng dâng lên cách miệng thùng bao nhiêu đêximet? (giả sử toàn bộ gạch ngập trong nước và chúng hút nước không đáng kể).*

✍ *Giải*

Thể tích của 25 viên gạch là: $V = (2.1.0,5).25 = 25$ (dm^3).

Diện tích đáy thùng là: $7.7 = 49$ (dm^2).

Chiều cao của nước dâng lên thêm khi bỏ gạch vào thùng là

$$h = \frac{V}{S} = \frac{25}{9} \approx 0,51 \text{ (dm)}.$$

Vậy, mực nước trong thùng cách miệng thùng là:

$$7 - (4 + 0,51) = 2,49 \text{ (dm)}.$$

Ví dụ 5: (Bài 58/tr 130 – Sgk): *Có một khối gỗ hình lập phương cạnh 9cm. Người ta đục ba "lỗ vuông" xuyên thủng khối gỗ (Hình sgk).*

a. *Tìm thể tích của khối gỗ còn lại.*

b. *Tìm tổng diện tích của tất cả các mặt (ngoài lẫn trong) của khối gỗ.*

✍ *Giải*

a. Nếu chia khối lập phương cạnh 9cm thành những khối lập phương nhỏ cạnh 3cm bằng cạnh của "lỗ vuông" thì được 9 khối.

Với cách đục ở hình đã cho thì ba lỗ này có ba phần chung là ba khối lập phương nhỏ cạnh 3cm.

Do đó, ta chỉ lấy 7 khối lập phương nhỏ cạnh 3cm để tính thể tích của ba lỗ vuông.

Vậy, thể tích khối gỗ còn lại là: $V = (9.9.9) - (7.3.3.3) = 540$ (cm^3).

b. Diện tích phía ngoài là diện tích của 6 hình vuông lớn cạnh 9cm trừ đi diện tích của 6 hình vuông nhỏ cạnh 3cm.

Diện tích phía trong là diện tích xung quanh của 6 hình lập phương nhỏ, nhưng trong đó có những mặt hình lập phương trùng nhau.

Như vậy, mỗi hình còn lại 4 mặt.

Tổng diện tích tất cả các mặt (trong lẫn ngoài) khối gỗ là:

$$S = 6(9.9 - 3.3) + 6(3.3.4) = 648 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

a. Khi nối D_1 với B và B_1 với D thì hai đường thẳng BD_1 và B_1D có cắt nhau hay không ? Và nếu chúng cắt nhau thì có thể vuông góc với nhau được không ? Vì sao ?

b. Câu hỏi tương tự như câu a) với B_1D và AC_1.

c. BD_1 và AA_1 có cắt nhau hay không ? Vì sao ?

d. Đường thẳng BD song song với những mặt phẳng nào ?

e. Đường thẳng BD vuông góc với những mặt phẳng nào ?

Bài 2: Cho hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình lập phương đó, biết:

a. AB = 6cm.

b. $AC = 4\sqrt{2}$ cm.

c. $OC = \sqrt{2}$ cm, với O là giao điểm của AC và BD.

d. $AC_1 = 3\sqrt{3}$ cm.

e. $OA_1 = 2\sqrt{3}$ cm, với O là giao điểm của AC và BD.

Bài 3: Cho hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$ có diện tích mặt chéo ACC_1A_1 bằng $25\sqrt{2}$ cm^2. Tính thể tích, diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình lập phương đó.

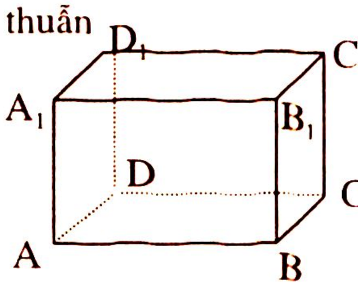
D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1:

a. Khi nối D_1 với B và B_1 với D thì hai đường thẳng BD_1 và B_1D cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Tuy nhiên, BD_1 và B_1D không thể vuông góc với nhau được vì nếu vậy thì:

BD_1B_1D là hình vuông $\Leftrightarrow BD = DD_1 \Leftrightarrow a = a\sqrt{2}$, mâu thuẫn



b. *Học sinh tự làm.*

c. BD_1 và AA_1 không cắt nhau. Vì nếu cắt nhau chúng sẽ đồng phẳng, điều này là mâu thuẫn.

d. Đường thẳng BD song song với các mặt phẳng:

$(A_1B_1C_1D_1)$, (AB_1D_1), (CB_1D_1).

e. Đường thẳng BD vuông góc với các mặt phẳng:

(ABB_1A_1), (BCC_1B_1), (CDD_1C_1), (ADD_1A_1) – Bốn mặt bên.

(ACC_1A_1), (BDD_1B_1) – Hai mặt chéo.

Bài 2:

a. Ta có ngay:

- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 4a^2 = 4.6^2 = 144cm^2$.
- Diện tích toàn phần: $S_{tp} = 6a^2 = 6.6^2 = 216cm^2$.
- Thể tích: $V = a^3 = 6^3 = 216cm^3$.

b. Để tính được diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình lập phương, ta cần biết số đo cạnh của nó.

Trong ΔABC vuông cân tại B, ta có:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Leftrightarrow 32 = a^2 + a^2 \Leftrightarrow a = 4cm$.

Khi đó, hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$ có:

- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 4a^2 = 4.4^2 = 64cm^2$.
- Diện tích toàn phần: $S_{tp} = 6a^2 = 6.4^2 = 96cm^2$.
- Thể tích: $V = a^3 = 4^3 = 64cm^3$.

c. *Học sinh tự làm* – Biết $OC = \frac{1}{2}AC$.

d. Để tính được diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình lập phương, ta cần biết số đo cạnh của nó.

Trong ΔACC_1 vuông tại C, ta có:

$C_1A^2 = AC^2 + C_1C^2 = AB^2 + BC^2 + C_1C^2 = 3a^2$

$\Leftrightarrow 27 = 3a^2 \Leftrightarrow a = 3cm$.

Khi đó, hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$ có:

- Diện tích xung quanh:

  $S_{xq} = 4a^2 = 4.3^2 = 36cm^2$.
- Diện tích toàn phần:

  $S_{tp} = 6a^2 = 6.3^2 = 54cm^2$.
- Thể tích:

  $V = a^3 = 3^3 = 27cm^3$.

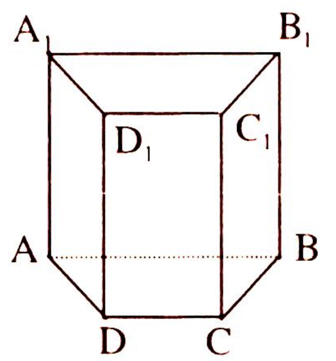
CHỦ ĐỀ 3

HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa: *Hình lăng trụ đứng* là hình có các mặt bên đều là những hình chữ nhật.



Hình bên cho ta hình ảnh của *hình lăng trụ đứng* $ABCDA_1B_1C_1D_1$, và ở đó:

1. Các điểm A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1 được gọi là các *đỉnh*.
2. Các đoạn AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 song song với nhau và bằng nhau, chúng được gọi là các *cạnh bên*.
3. Các mặt ABB_1A_1, BCC_1B_1, CDD_1C_1, ADD_1A_1 là những hình chữ nhật, chúng được gọi là các *mặt bên*.
4. Hai mặt ABCD, $A_1B_1C_1D_1$ là hai *đáy*.
5. Hình lăng trụ này có đáy là tứ giác nên gọi là *lăng trụ tứ giác*.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy:

- Hình hộp chữ nhật, hình lập phương cũng là những hình lăng trụ.
- Hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành được gọi là hình hộp đứng.

2. CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH, THỂ TÍCH

Diện tích xung quanh *của hình lăng trụ đứng bằng chu vi đáy nhân chiều cao.*

Như vậy, ta có:

$$S_{xq} = 2p.h$$

trong đó:

- p là nửa chu vi đáy.
- h là chiều cao.

Diện tích toàn phần *của hình lăng trụ đứng bằng tổng diện tích xung quanh và diện tích hai đáy.*

Như vậy, ta có: $S_{tp} = S_{xq} + 2S_{đáy}$.

Thể tích *của hình lăng trụ đứng bằng diện tích đáy nhân với chiều cao.*

Như vậy, ta có: V = S.h.

trong đó:

- S là diện tích đáy.
- h là chiều cao.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: CHỨNG MINH CÁC TÍNH CHẤT CỦA HÌNH LĂNG TRỤ

Ví dụ 1: *Cho hình lăng trụ đứng tam giác* $ABCA_1B_1C_1$.

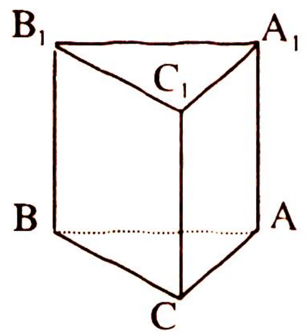
a. *Trong hình lăng trụ đó hãy chỉ ra những cặp mặt phẳng song song với nhau.*

b. *Trong hình lăng trụ đó hãy chỉ ra những cặp mặt phẳng vuông góc với nhau.*

c. *Sử dụng kí hiệu* " // ", " $\perp$ " *và* " $\in$ " *điền vào các ô trong bảng sau:*

	AA_1	BB_1	CC_1	AB	BC	AC	A_1B_1	B_1C_1	A_1C_1
(ABC)									
$(A_1B_1C_1)$									
(ABB_1A_1)									

✍ *Giải*



a. Ta chỉ có (ABC) // $(A_1B_1C_1)$.

b. Ta có:

- (AA_1B_1B), (BB_1C_1C), (AA_1C_1C) cùng vuông góc với (ABC).
- (AA_1B_1B), (BB_1C_1C), (AA_1C_1C) cùng vuông góc với $(A_1B_1C_1)$.

c. Ta có:

	AA_1	BB_1	CC_1	AB	BC	AC	A_1B_1	B_1C_1	A_1C_1
(ABC)	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\in$	$\in$	$\in$	//	//	//
$(A_1B_1C_1)$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	//	//	//	$\in$	$\in$	$\in$
(ABB_1A_1)	$\in$	$\in$	//	$\in$			$\in$		

Ví dụ 2: *Cho hình lăng trụ đứng* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *có đáy* ABCD *là hình thang cân* (AB // CD) *có AC vuông góc với* BD.

a. *Đường thẳng* BD *và* A_1C *có cắt nhau không ? Vì sao ?*

b. *Đường thẳng* AD *song song với những mặt phẳng nào ?*

c. *Đường thẳng* AC *vuông góc với những mặt phẳng nào ?*

d. *Trong hình lăng trụ đó hãy chỉ ra những cặp mặt phẳng song song với nhau.*

e. *Trong hình lăng trụ đó hãy chỉ ra những cặp mặt phẳng vuông góc với nhau.*

✍ *Giải*

a. Đường thẳng BD và A_1C không cắt nhau, bởi nếu chúng cắt nhau thì 4 điểm B, C, D, A_1 cùng thuộc một mặt phẳng

$\Leftrightarrow A_1 \in (BCD) \Leftrightarrow A_1 \in (ABCD)$, mâu thuẫn.

b. Ta có: $AD // A_1D_1 \in (A_1B_1C_1D_1) \Rightarrow AD // (A_1B_1C_1D_1)$.

$AD // A_1D_1 \in (A_1D_1B) \Rightarrow AD // (A_1D_1B)$.

$AD // A_1D_1 \in (A_1D_1C) \Rightarrow AD // (A_1D_1C)$.

Vậy, có 3 mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1)$, (A_1D_1B), (A_1D_1C) song song với AD.

c. Ta có: $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp BB_1 \end{cases} \Rightarrow AC \perp (BB_1D_1D)$.

Vậy, có duy nhất mặt phẳng (BB_1D_1D) vuông góc với AC.

d. Ta có các cặp mặt phẳng song song với nhau là:

$(ABCD) // (A_1B_1C_1D_1)$ và $(ABB_1A_1) // (CDD_1C_1)$.

e. Dựa trên tính chất của hình lăng trụ đứng ta có ngay các mặt phẳng vuông góc với hai đáy (ABCD) và $(A_1B_1C_1D_1)$ là:

(AA_1B_1B), (BB_1C_1C), (CC_1D_1D),

(AA_1D_1D), (AA_1C_1C), (BDD_1B_1).

Mặt khác:

- Vì $AC \perp (BB_1D_1D)$ nên các mặt phẳng chứa AC đều vuông góc với mặt phẳng (BB_1D_1D), do đó ta có:

  $(ACC_1A_1) \perp (BB_1D_1D)$, $(ACB_1) \perp (BB_1D_1D)$, $(ACD_1) \perp (BB_1D_1D)$.

- Vì $BD \perp (ACC_1A_1)$ nên các mặt phẳng chứa BD đều vuông góc với mặt phẳng (ACC_1A_1), do đó ta có:

  $(BDD_1B_1) \perp (ACC_1A_1)$,

  $(BDA_1) \perp (ACC_1A_1)$,

  $(BDC_1) \perp (ACC_1A_1)$.

- Vì $A_1C_1 \perp (BB_1D_1D)$ nên các mặt phẳng chứa A_1C_1 đều vuông góc với mặt phẳng (BB_1D_1D), do đó ta có thêm:

  $(A_1C_1B) \perp (BB_1D_1D)$, $(A_1C_1D) \perp (BB_1D_1D)$.

- Vì $B_1D_1 \perp (ACC_1A_1)$ nên các mặt phẳng chứa BD đều vuông góc với mặt phẳng (ACC_1A_1), do đó ta có thêm:

  $(B_1D_1A) \perp (ACC_1A_1)$, $(B_1D_1C) \perp (ACC_1A_1)$.

Vấn đề 2: TÍNH TOÁN CÁC YẾU TỐ CỦA HÌNH LĂNG TRỤ

Ví dụ 1: (Bài 23/tr 11 – Sgk): *Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của các hình lăng trụ đứng trong sgk.*

✍ *Giải*

a. Hình hộp chữ nhật (hình lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật)

- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2(3 + 4)5 = 70\ (cm^2)$.
- Diện tích toàn phần: $S_{tp} = 70 + 2(3.4) = 94\ (cm^2)$.

b. Hình lăng trụ đứng tam giác có ΔABC vuông tại A.

Suy ra $BC = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

- Diện tích xung quanh:

$$S_{xq} = 2(2 + 3 + \sqrt{13})5 = 25 + 5\sqrt{13} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

- Diện tích toàn phần:

$$S_{tp} = 25 + 5\sqrt{13} + 2\left(\frac{1}{2}.2.3\right) = 31 + 5\sqrt{13} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Ví dụ 2: (Bài 53/tr 128 – Sgk): *Thùng chứa của xe ở hình sgk có dạng hình lăng trụ tam giác, các kích thước cho trên hình. Hỏi dung tích của thùng là bao nhiêu?*

✍ *Giải*

Thùng chứa của xe là một hình lăng trụ đứng có:

- Chiều cao 60cm.
- Đáy là tam giác có một cạnh là 80cm và đường cao tương ứng là 50cm.

Suy ra: $S_{đáy} = \frac{1}{2}.80.50 = 2000 \text{ (cm}^2\text{)}$.

Vậy, dung tích của thùng chứa là: $V = 2000.60 = 120000 \text{ (cm}^3\text{)}$120 lít.

Ví dụ 3: (Bài 30/tr 114 – Sgk): *Các hình* a), b), c) *trong sgk gồm một hoặc nhiều dạng lăng trụ đứng. Hãy tính thể tích và diện tích toàn phần của chúng theo các kích thước đã cho trên hình.*

✍ *Giải*

Hình a) là lăng trụ có đáy là tam giác vuông có:

- Các cạnh 6cm, 8cm và cạnh thứ ba là $\sqrt{6^2 + 8^2} = 10$cm.
- Chiều cao h = 3cm.

Do đó: $V = S.h = \frac{1}{2}.6.8.3 = 72 \text{ (cm}^3\text{)}$

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S = (6 + 8 + 10).3 + 2.\frac{1}{2}.6.8 = 120 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Hình b) là lăng trụ đứng bằng lăng trụ đứng ở hình a). Do đó:

$V = 72 \text{ (cm}^3\text{)}$; $S_{tp} = 120 \text{ (cm}^2\text{)}$

Hình c) gồm 2 lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật

Ta có:

$V = (4.1 + 1.1).3 = 15 \text{ (cm}^3\text{)}$

$S_{xq} = (4 + 2 + 1 + 1).2 = 10 \text{ (cm}^2\text{)}$.

$S_{hai\ đáy} = (4.2 + 1.1).2 = 10 \text{ (cm}^2\text{)}$.

$S_{tp} = 36 + 10 = 46 \text{ (cm}^2\text{)}$.

Ví dụ 4: (Bài 56/tr 128 – Sgk): *Một cái lều ở trại hè có dạng hình lăng trụ đứng tam giác (với các kích thước cho trên hình sgk).*

a. *Tính thể tích khoảng không ở bên trong lều.*

b. *Số vải bạt cần phải có để dựng lều đó là bao nhiêu? (Không tính các mép và nếp gấp của lều).*

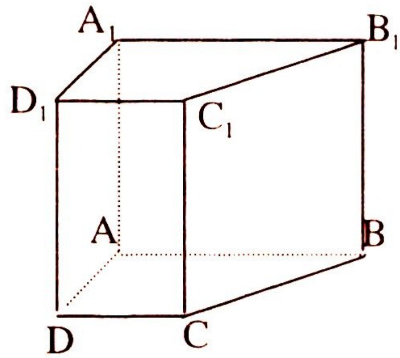
✍ *Giải*

a. Thể tích khoảng không bên trong lều là thể tích hình lăng trụ đứng tam giác:

$$V = \left(\frac{1}{2}.3,2.1,2\right).5 = 9,6\ (m^3).$$

b. Số vải bạt cần thiết để dựng lều là tổng diện tích hai mái và diện tích hai đầu lều: $S = 2(2.5) + 2.\frac{1}{2}.1,2.3,2 = 23,8\ (m^2)$.

Ví dụ 5: *Cho hình lăng trụ đứng* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *có đáy ABCD là hình thang vuông* ($\hat{A} = \hat{D} = 90^0$), AB = 6cm, CD = 2cm, AD = 3cm *và* AA_1 = 5cm. *Tính diện tích một đáy, diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình lăng trụ.*



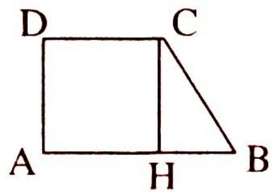
✍ *Giải*

Xét hình thang ABCD, hạ CH vuông góc với AB, ta có:

CH = AD = 3cm, BH = AB – AH = AB – CD = 4cm.

Trong ΔHBC vuông tại H, ta có:

$BC^2 = BH^2 + CH^2 = 4^2 + 3^3 = 25 \Leftrightarrow BC = 5cm.$



Khi đó, ta lần lượt có:

- Diện tích một đáy:

$$S_{đáy} = (AB + CD).AD = (6 + 2).3 = 24cm^2.$$

- Diện tích xung quanh:

$$S_{xq} = (AB + BC + CD + DA).AA_1 = (6 + 5 + 2 + 3).5 = 80cm^2.$$

- Diện tích toàn phần:

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{đáy} = 80 + 2.24 = 128cm^2.$$

- Thể tích: $V = S_{đáy}.h = 24.5 = 120cm^3$.

Ví dụ 6: (Bài 52/tr 128 – Sgk): *Tính diện tích toàn phần của thanh gỗ như ở hình sgk (mặt trước, mặt sau của thanh gỗ là những hình thang cân, bốn mặt còn lại đều là những hình chữ nhật, cho biết* $\sqrt{10} \approx 3,16$).

✍ *Giải*

Kẻ AH và BK vuông góc với CD.

Ta có: AD = BC; D = C ⇒ ΔAHD = ΔBKC

$$\Rightarrow DH = CK = \frac{CD - AB}{2} = \frac{6-3}{2} = 1,5\ (cm)$$

Áp dụng định lí Pitago vào tam giác vuông AHD, ta có:

$$AH = \sqrt{AD^2 - DH^2} = \sqrt{(3,5)^2 - (1,5)^2} \approx 3,16\ (cm).$$

Suy ra $S_{ABCD} = \left(\frac{3+6}{2}\right).3,16 = 14,22.$

Do đó, diện tích mặt trước và mặt sau của thanh gỗ là:

$2S = 14,22.2 = 28,44\ (cm^2)$

Thanh gỗ là hình lăng trụ đứng có đáy là hình thang cân, chiều cao 11,5cm, ta có:

$S_{xq} = (3 + 6 + 3,5 + 3,5).11,5 = 184\ (cm^2)$

Vậy, diện tích toàn phần của thanh gỗ là: $S_{tp} = 28,44 + 184 = 212,44\ (cm^2)$

Ví dụ 7: (Bài 29/tr 114 – Sgk): *Các kích thước của một bể bơi được cho trên hình sgk (mặt nước có dạng hình chữ nhật). Hãy tính xem bể chứa được bao nhiêu mét khối nước khi nó chứa đầy nước.*

✍ *Giải*

Bể bơi có dạng lăng trụ đứng mà các mặt đáy là các hình ABCDE, A'B'C'D'E'.

Để tính dung tích bể bơi, ta chia thành hai lăng trụ đứng:

- Lăng trụ có đáy là hình chữ nhật ABCD.
- Lăng trụ có đáy là hình tam giác DEF.

Thể tích nước chứa trong lăng trụ đứng ABCD.A'B'C'D' là:

$V_1 = 25.2.10 = 500\ (m^3)$

Thể tích nước chứa trong lăng trụ đứng DEF.D'E'F' là:

$$V_2 = \frac{1}{2}.2.7.10 = 70\ (m^3)$$

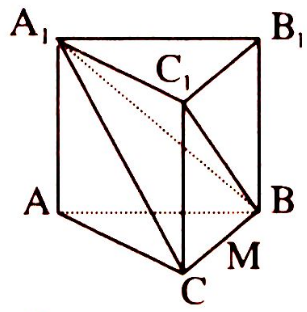
Do đó, ta được $V_1 + V_2 = 500 + 70 = 570\ (m^3)$.

Ví dụ 8: *Cho hình lăng trụ tam giác đều* $ABCA_1B_1C_1$ *có các cạnh bằng* a.

a. *Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình lăng trụ.*

b. *Tính tỉ số diện tích của hai tam giác* ΔABC *và* ΔA_1BC.

✍ Giải



a. Ta lần lượt có:

- Diện tích xung quanh:

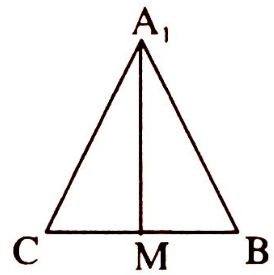
$$S_{xq} = (AB + BC + CA).AA_1$$
$$= (a + a + a).a = 3a^2.$$

- Diện tích toàn phần:

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{đáy} = 3a^2 + 2.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3a^2 + \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

- Thể tích: $V = S_{đáy}.h = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.a = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

b. Gọi M là trung điểm của BC. Trong ΔA_1BC, ta có:



$$A_1M^2 = A_1C^2 - BM^2 = A_1A^2 + AC^2 - BM^2$$
$$= a^2 + a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{7a^2}{4} \Leftrightarrow A_1M = \frac{a\sqrt{7}}{2},$$

Ta có: $S_{\Delta A_1BC} = \frac{1}{2}A_1M.BC = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{7}}{2}.a = \frac{a^2\sqrt{7}}{4}$.

Khi đó: $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1BC}} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{a^2\sqrt{7}}{4}} = \sqrt{\frac{3}{7}}$.

Ví dụ 9: (Bài 54/tr 128 – Sgk): *Người ta muốn đổ một tấm bê tông dày 3cm, bề mặt của tấm bê tông có các kích thước như ở hình sgk.*

a. *Số bê tông cần phải có là bao nhiêu?*

b. *Cần phải có bao nhiêu xe chuyên chở để chở số bê tông cần thiết đến chỗ đổ bê tông, nếu mỗi xe chứa được* $0,06m^3$? (*không tính số bê tông dư thừa hoặc rơi vãi*).

✍ Giải

a. Hình dạng của tấm bê tông là một hình lăng trụ đứng có chiều cao là 3cm = 0,03m và đáy là một đa giác.

Để tính diện tích đáy, ta chia đa giác đã cho thành một hình chữ nhật và một hình thang.

Ta có: $S_{đáy} = (3,6.4,20) + \frac{1}{2}.1,5(2,15 + 4,20) \approx 19,88\ (m^2)$

Vậy thể tích tấm bê tông là: $V = S_{đáy}.h = 19,88.0,03 = 0,6\ m^3$.

b. Số chuyến xe cần thiết để vận chuyển lượng bê tông là:

0,6 : 0,06 = 10 (chuyến).

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho hình lăng trụ đứng $ABCDA_1B_1C_1D_1$ có đáy ABCD là hình thang vuông ($\hat{A} = \hat{D} = 90^0$)

a. Hai mặt phẳng (AA_1D_1D) và (BB_1C_1C) có cắt nhau không ? Vì sao ?

b. Đường thẳng AD song song với những mặt phẳng nào ?

c. Đường thẳng AD vuông góc với những mặt phẳng nào ?

d. Trong hình lăng trụ đó hãy chỉ ra những cặp mặt phẳng song song với nhau.

e. Trong hình lăng trụ đó hãy chỉ ra những cặp mặt phẳng vuông góc với nhau.

Bài 2: Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABCA_1B_1C_1$, có ABC là tam giác vuông tại B.

a. Trong hình lăng trụ đó hãy chỉ ra những cặp mặt phẳng song song với nhau.

b. Trong hình lăng trụ đó hãy chỉ ra những cặp mặt phẳng vuông góc với nhau.

c. Sử dụng kí hiệu " // " và " ⊥ " điền vào các ô trong bảng sau:

	AA_1	BB_1	CC_1	AB	BC	AC	A_1B_1	B_1C_1	A_1C_1
(ABC)									
$(A_1B_1C_1)$									
(ABB_1A_1)									

Bài 3: Cho hình lăng trụ đứng $ABCDA_1B_1C_1D_1$ có đáy ABCD là hình thang vuông ($\hat{A} = \hat{D} = 90^0$), AB = 12cm, BC = 10cm, CD = 4cm và AA_1 = 6cm. Tính diện tích một đáy, diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình lăng trụ.

Bài 4: Cho hình lăng trụ đứng $ABCDA_1B_1C_1D_1$ có đáy ABCD là hình thang cân (AB // CD), BC = 4cm, CD = 6cm, $\widehat{BAD} = 60^0$ và AA_1 = 4cm. Tính diện tích một đáy, diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình lăng trụ.

Bài 5: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABCA_1B_1C_1$ có các cạnh bằng 3cm.

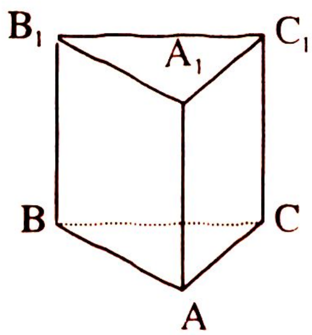
a. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình lăng trụ.

b. Tính tỉ số diện tích của hai tam giác ΔABC và ΔA_1BC.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1: *Tham khảo ví dụ 1.*

Bài 2:



a. (ABC) // $(A_1B_1C_1)$.

b. Ta có:

- (ABC) vuông góc với các mặt phẳng: (AA_1B_1B), (BB_1C_1C), (AA_1C_1C).
- $(A_1B_1C_1)$ vuông góc với các mặt phẳng: (AA_1B_1B), (BB_1C_1C), (AA_1C_1C).
- $(AA_1B_1B) \perp (BB_1C_1C)$.

c. Ta có:

	AA_1	BB_1	CC_1	AB	BC	AC	A_1B_1	B_1C_1	A_1C_1
(ABC)	⊥	⊥	⊥				//	//	//
$(A_1B_1C_1)$	⊥	⊥	⊥	//	//	//			
(ABB_1A_1)			//		⊥			⊥	

Bài 3: *Tham khảo thí dụ 2.*

Bài 4, 5: *Học sinh tự làm.*

CHỦ ĐỀ 4

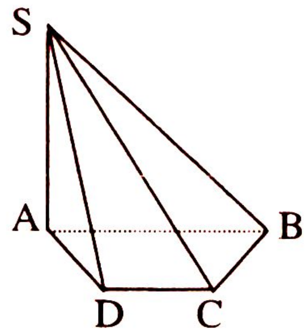
HÌNH CHÓP ĐỀU

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. HÌNH CHÓP ĐỀU

***Định nghĩa**: **Hình chóp** là hình có mặt đáy là một đa giác và các mặt bên là các tam giác có chung đỉnh.*

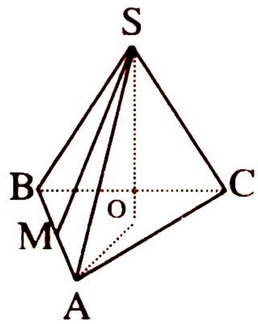
Hình bên cho ta hình ảnh của *hình chóp* S.ABCD, và ở đó:



1. Điểm S được gọi là *đỉnh* của hình chóp.
2. Các đoạn SA, SB, SC, SD được gọi là các *cạnh bên* của hình chóp.
3. Các tam giác SAB, SBC, SCD, SAD được gọi là các *mặt bên* của hình chóp.
4. Mặt ABCD là *đáy* của hình chóp.
6. Hình chóp này có đáy là tứ giác nên gọi là *hình chóp tứ giác*.

***Định nghĩa**: **Hình chóp đều** là hình chóp có đáy là một đa giác đều, các mặt bên là các tam giác cân bằng nhau có chung đỉnh.*

Hình bên cho ta hình ảnh của *hình chóp tam giác đều* S.ABC, và ở đó:



1. Điểm S được gọi là *đỉnh* của hình chóp.
2. Các đoạn SA, SB, SC bằng nhau được gọi là các *cạnh bên* của hình chóp.
3. Các tam giác SAB, SBC, SAC là các tam giác cân đỉnh S, chúng được gọi là các *mặt bên* của hình chóp.
4. ABC là một tam giác đều và nó được gọi là *đáy* của hình chóp.
5. Đoạn SM (với M là trung điểm của AB) được gọi là *trung đoạn*.
6. Đoạn SO (với O là tâm của đáy ABC) được gọi là *đường cao*.
7. Hình chóp này có đáy là tam giác nên gọi là *hình chóp tam giác đều*.

2. CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH, THỂ TÍCH

***Diện tích xung quanh** của hình chóp đều bằng tích của nửa chu vi với trung đoạn.*

Như vậy, ta có: $S_{xq} = p.d$

trong đó:

- p là nửa chu vi đáy.
- d là trung đoạn.

***Diện tích toàn phần** của hình chóp đều bằng tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy.*

Như vậy, ta có: $S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy}$.

Thể tích *của hình chóp đều bằng một phần ba tích của diện tích đáy nhân với chiều cao.*

Như vậy, ta có: $V = \frac{1}{3}S.h.$

trong đó:

- S là diện tích đáy.
- h là chiều cao.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

<u>Vấn đề 1:</u> CHỨNG MINH CÁC TÍNH CHẤT CỦA HÌNH CHÓP ĐỀU

<u>Ví dụ 1:</u> (Bài 37/tr 118 – Sgk): *Hãy xét sự đúng, sai của các phát biểu sau:*

a. *Hình chóp đều có đáy là hình thoi và chân đường cao trùng với giao điểm hai đường chéo của đáy.*

b. *Hình chóp đều có đáy là hình chữ nhật và chân đường cao trùng với giao điểm hai đường chéo của đáy.*

✍ *Giải*

a. Phát biểu: Hình chóp đều có đáy là hình thoi và chân đường cao trùng với giao điểm hai đường chéo của đáy là sai.

Vì hình thoi không phải là một đa giác đều nên hình chóp có đáy là hình thoi không phải là hình chóp đều.

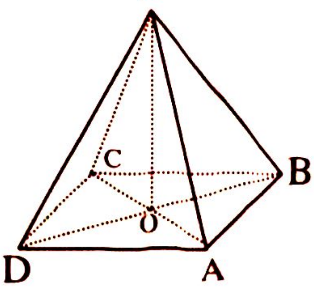
b. Phát biểu: Hình chóp đều có đáy là hình chữ nhật và chân đường cao trùng với giao điểm hai đường chéo của đáy là sai.

Vì hình chữ nhật không phải là đa giác đều nên hình chóp có mặt đáy là hình chữ nhật không phải là hình chóp đều.

<u>Ví dụ 2:</u> *Cho hình chóp tứ giác đều* SABCD, *gọi* O *là giao điểm của* AC *và* BD.

a. *Chứng minh rằng* $SO \perp (ABCD)$.

b. *Chứng minh rằng* $(SAC) \perp (SBD)$.



✍ *Giải*

a. Ta lần lượt có:

- Trong ΔSAC, ta có:

  $SA = SC \Leftrightarrow \Delta SAC$ cân tại S

  $\Rightarrow SO \perp AC.$ (1)

- Trong ΔSBD, ta có:

  $SB = SD \Leftrightarrow \Delta SBD$ cân tại S $\Rightarrow SO \perp BD.$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $SO \perp (ABCD)$.

b. Từ kết quả câu a), ta có:

$SO \perp AC.$ (3)

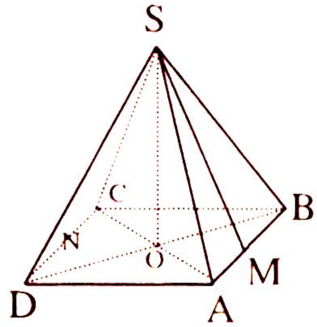
Mặt khác, vì ABCD là hình vuông nên:

$BD \perp AC.$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra: $(SBD) \perp AC \in (SAC) \Rightarrow (SAC) \perp (SBD)$.

Ví dụ 3: *Cho hình chóp tứ giác đều SABCD có chiều cao h và cạnh đáy bằng a. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB và CD. Tìm mối liên hệ giữa a và h để ΔSMN là tam giác đều.*

Giải



Trong ΔSMN, ta có:

$MN = BC = a$

do đó, để ΔSMN là tam giác đều điều kiện là:

$$SO = \frac{MN\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy, với $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ thì ΔSMN là tam giác đều.

Vấn đề 2: TÍNH TOÁN CÁC YẾU TỐ CỦA HÌNH CHÓP ĐỀU

Ví dụ 1: (Bài 40/tr 121 – Sgk): *Một hình chóp tứ giác đều có độ dài cạnh bên bằng 25cm, đáy là hình vuông ABCD cạnh 30cm. Tính diện tích toàn phần của hình chóp.*

Giải

Kẻ SM ⊥ BC thì SM là trung đoạn của hình chóp đều S.ABCD (S là đỉnh).
Do tam giác ABC cân tại S nên AM cũng là trung tuyến

$$\Rightarrow MB = MC = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}.30 = 15 \text{ (cm)}$$

Xét ΔABM có:

$$M = 90^0 \Rightarrow SM = \sqrt{SB^2 - MB^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20 \text{ (cm)}$$

Ta có:

$$p_{(ABCD)} = \frac{1}{2}.4.30 = 60 \text{ (cm)}; \qquad S_{(ABCD)} = 30^0 = 900 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

$$S_{xq} = p.SM = 60.20 = 1200 \text{ (cm}^2\text{)}; \qquad S_{tp} = 900 + 1200 = 2100 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Ví dụ 2: (Bài 43/tr 121 – Sgk): *Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của các hình chóp tứ giác đều trong sgk.*

Giải

Hình a) là hình chóp tứ giác đều với cạnh đáy là 20m, trung đoạn 20m.
Ta có:

- Diện tích xung quanh: $S = (2.20).20 = 800$ (m^2).
- Diện tích toàn phần: $S = 800 + 20^2 = 1200$ (m^2).

Hình b) là hình chóp tứ giác đều với cạnh đáy là 7cm, trung đoạn 12cm.
Ta có:

- Diện tích xung quanh: $S = (2.7).12 = 168$ (cm^2).
- Diện tích toàn phần: $S = 168 + 7^2 = 217$ (cm^2).

Hình c) là hình chóp tứ giác đều với cạnh đáy là 16cm, trung đoạn 17cm.

Ta có:

- Trung đoạn $d = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$ (cm)
- Diện tích xung quanh: $S = (2.16).15 = 480$ (m^2).
- Diện tích toàn phần: $S = 480 + 16^2 = 736$ (m^2).

Ví dụ 3: (Bài 45/tr 124 – Sgk): *Tính thể tích của mỗi hình chóp đều trong sgk.*

✍ *Giải*

a. Hình a) là hình chóp tam giác đều A.BDC. Ta có:

$$BC = 10cm \Rightarrow MB = MC = \frac{1}{2}BC = 5cm.$$

Trong ΔBMD, áp dụng định lí Pitago ta có:

$$BD^2 = MB^2 + DM^2 \Rightarrow DM^2 = 10^2 - 5^2 = 75 \Rightarrow DM \approx 8,66 \text{ (cm)}$$

Do đó: $S_{BCD} = \frac{1}{2}DM.BC \approx 43,3$ (cm^2)

Vậy, thể tích hình chóp đều A.BDC là:

$$V = \frac{1}{3}.S_{BCD}.OA = \frac{1}{3}.43,3.12 = 173,2 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

b. Hình b) là hình chóp tam giác đều A.BDC. Ta có:

$$BC = 8cm \Rightarrow MB = MC = \frac{1}{2}BC = 4cm.$$

Tương tự, ta có:

$DM \approx 6,93$ (cm)

$S_{BDC} = 27,72$ (cm^2) .

$V \approx 149,69$ (cm^3).

Ví dụ 4: (Bài 49.b/tr 125 – Sgk): *Tính diện tích toàn phần của hình chóp lục giác đều, biết cạnh đáy* a = 6cm, *cạnh bên* b = 10cm, $\sqrt{3} \approx 1,73$; $\sqrt{91} \approx 9,54$.

✍ *Giải*

Ta có:

- Trung đoạn của hình chóp lục giác đều là: d = 4cm.
- Diện tích xung quanh $S_{xq} = (3.6).4 = 72$ (cm^2)
- Diện tích đáy: $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \approx 15,57$ (cm^2)
- Diện tích toàn phần: $S_{tp} = 72 + 15,57 = 87,57$ (cm^2).

Ví dụ 5: *Cho hình chóp tam giác đều* S.ABC *có các mặt bên là những tam giác đều,* AB = 4cm *và* O *là trọng tâm. Gọi* M *là trung điểm* BC.

a. *Tính độ dài các đoạn thẳng* SO, SM.

b. *Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình chóp.*

Giải

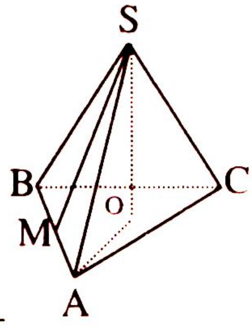
a. Nhận xét rằng:

$SA = SB \Leftrightarrow \Delta SAB$ cân tại $S \Rightarrow SM \perp AB$.

Trong ΔSMA vuông tại M, ta có:

$$SM^2 = SA^2 - AM^2 = 4^2 - 2^2 = 12 \Leftrightarrow SM = 2\sqrt{3}\text{ cm}.$$

Trong ΔSOA vuông tại O, ta có:



$$SO^2 = SA^2 - AO^2 = 4^2 - \left(\frac{2}{3}.\frac{4\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{32}{3} \Leftrightarrow SO = \frac{4\sqrt{6}}{3}\text{cm}.$$

b. Ta lần lượt có:

- Diện tích xung quanh:

$$S_{xq} = \frac{1}{2}(AB + BC + CA).SM = \frac{1}{2}(4 + 4 + 4).2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}\text{ cm}^2.$$

- Diện tích toàn phần:

$$S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy} = 12\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3}\text{ cm}^2.$$

- Thể tích:

$$V = \frac{1}{3}S_{đáy}.h = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SO = \frac{1}{3}.4\sqrt{3}.\frac{4\sqrt{6}}{3} = \frac{16\sqrt{2}}{3}\text{cm}^3.$$

Ví dụ 6: *Cho hình chóp tứ giác đều* SABCD *có chiều cao* 15cm *và thể tích là* 1280cm^3.

a. *Tính độ dài cạnh đáy.*

b. *Tính diện tích xung quanh.*

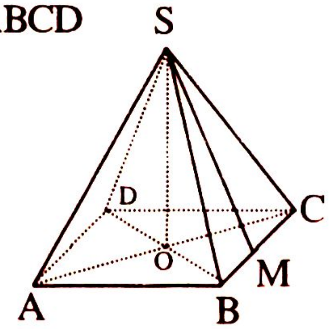
Giải

a. Gọi a là độ dài cạnh đáy của hính chóp tứ giác đều SABCD

Từ giả thiết, ta có:

$$V = \frac{1}{3}S_{đáy}.h = \frac{1}{3}a^2.15 = 5a^2 = 1280 \Leftrightarrow a = 16\text{cm}.$$

Vậy, độ dài cạnh đáy a = 16cm.



b. Gọi M là trung điểm BC, ta có:

$$S_{xq} = p.d = \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DA).SM = 32SM.$$

Gọi O là giao điểm của AC và BD, ta có: $OM = \frac{1}{2}AB = 8\text{cm}$.

Trong tam giác vuông SOM ta có:

$$SM^2 = SO^2 + OM^2 = 15^2 + 8^2 = 289 \Leftrightarrow SM = 17\text{cm}.$$

Khi đó, ta được: $S_{xq} = 32.17 = 544\text{cm}^2$.

Vậy, diện tích xung quanh hình chóp bằng 544cm^2.

Ví dụ 7: (Bài 44/tr 123 – Sgk): *Hình vẽ (SGK) là một cái lều ở trại hè của học sinh kèm theo các kích thước.*

a. *Tính thể tích không khí bên trong lều là bao nhiêu?*

b. *Xác định số vải bạt cần thiết để dựng lều (không tính đến đường viền, nếp gấp, biết* $\sqrt{5} \approx 2,24$).

✍ *Giải*

a. Lều trại có dạng hình chóp tứ giác đều với cạnh đáy 2m, chiều cao 2m.

Do đó, thể tích của hình chóp đều này là: $V = \frac{1}{3}.2^2.2 \approx 2,67\ (m^3)$

Biết rằng, thể tích khối không khí trong lều chính là thể tích của hình chóp. Vậy, thể tích của khối không khí trong lều xấp xỉ $2,67m^3$.

b. Biết rằng số vải bạt cần thiết để dựng lều bằng diện tích xung quanh của hình chóp tứ giác đều.

Ta có:

- Nửa chu vi đáy là: $p = \frac{1}{2}.4.2 = 4\ (m)$
- Cạnh bên của tam giác cân có d là đường cao là:

  $a = \sqrt{2^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{6}\ (m)$
- Đường cao của hình chóp là:

  $d = \sqrt{(\sqrt{6})^2 - 1^2} = \sqrt{5}\ (m)$

  $\Rightarrow S_{xq} = p.d = 4.\sqrt{5} \approx 8,96\ (m^2)$

Vậy, số vải bạt cần thiết để dựng lều là $8,96\ m^2$.

Ví dụ 8: (Bài 44/tr 123 – Sgk): *Hình* S.MNOPQR *trong sgk là một hình chóp lục giác đều. Bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy (đường tròn tâm* H, *đi qua* 6 *đỉnh của đáy)* HM = 35cm. *Hãy tính:*

a. *Diện tích đáy và thể tích của hình chóp (biết* $\sqrt{108} \approx 10,39$).

b. *Độ dài cạnh bên* SM *và diện tích toàn phần của hình chóp (biết* $\sqrt{1333} \approx 36,51$).

✍ *Giải*

a. Theo tính chất của lục giác đều, ΔMHN là một trong sáu tam giác đều tạo bởi các đường chéo của lục giác đều đó.

Ta có: $HK = \sqrt{HM^2 - MK^2} = \sqrt{12^2 - 6^2} \approx 10,39\ (cm)$.

$\Rightarrow S_{MHN} = \frac{1}{2}HK.MN = \frac{1}{2}10,39.12 = 62,34\ (cm^2)$.

$\Rightarrow S_{MNOPQR} = 6.S_{MHN} = 6.62,34 \approx 374,04\ (cm^2)$

Vậy, thể tích hình chóp là: $V = \frac{1}{3}S_{đáy}.SH \approx \frac{1}{3}.374,04.35 \approx 43638\ (cm^3)$

b. Áp dụng định lí Pitago vào ΔSHM, ta có:

$$SM = \sqrt{35^2 + 12^2} = 37 \text{ (cm)}$$

Ta có, K là trung điểm của MN nên SK là trung đoạn của hình chóp.

Xét ΔSKM, ta có:

$$SK = \sqrt{SM^2 - KM^2} \times 36,51 \text{ (cm)}$$

Diện tích xung quanh của hình chóp đều S.MNOPQR là:

$$S_{xq} = p.d = 3.MN.SK = 3.12.36,51 = 1314,36.$$

Diện tích toàn phần của hình chóp đều S.MNOPQR là:

$$S_{tp} = S_{đáy} + S_{xq} \approx 374,04 + 1314,36 \approx 1688,40 \text{ (cm}^2\text{)}$$

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho hình chóp tam giác đều SABC có cạnh đáy và cạnh bên đều bằng a. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình chóp.

Bài 2: Cho hình chóp tam giác đều SABC có các mặt bên là các tam giác đều. Gọi O là trọng tâm ΔABC, biết $OA = \sqrt{3}$. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình chóp.

Bài 3: Cho hình chóp tam giác đều SABC có chiều cao bằng a và thể tích bằng $3a^3$.

a. Tính độ dài cạnh đáy.

b. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình chóp.

Bài 4: Cho hình chóp tứ giác đều SABCD có cạnh đáy và cạnh bên đều bằng a. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình chóp.

Bài 5: Cho hình chóp tứ giác đều SABCD có chiều cao bằng a và thể tích bằng $3a^3$.

a. Tính độ dài cạnh đáy.

b. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình chóp.

Bài 6: Cho hình chóp lục giác đều SABCDEF có cạnh đáy và cạnh bên đều bằng a. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình chóp.

Bài 7: Cho hình chóp lục giác đều SABCDEF có chiều cao bằng a và thể tích bằng $18a^3$.

a. Tính độ dài cạnh đáy.

b. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình chóp.

Bài 8: Cho hình hộp chữ nhật $ABCDA_1B_1C_1D_1$ có AB = BC = 5cm, AA_1 = 6cm. Gọi O là giao điểm của A_1C_1 và B_1D_1.

a. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình hộp chữ nhật.

b. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình chóp OABCD.

Bài 9: Cho hình chóp tam giác đều S.ABC, gọi O là trọng tâm của ΔABC.

a. Chứng minh rằng $SO \perp (ABC)$.

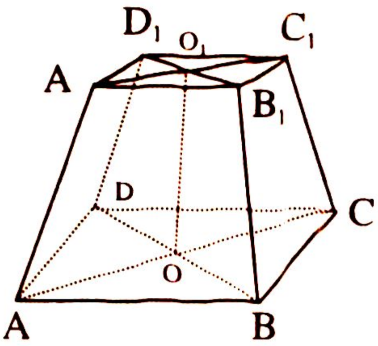
b. Chứng minh rằng $(SAO) \perp (SBC)$.

CHỦ ĐỀ 5

HÌNH CHÓP CỤT ĐỀU

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. ĐỊNH NGHĨA



Định nghĩa: Cắt một hình chóp đều bằng một mặt phẳng song song với đáy, phần hình chóp nằm giữa mặt phẳng đó và mặt phẳng đáy là một hình chóp cụt đều.

Hình bên cho ta hình ảnh của *hình chóp cụt đều* $ABCDA_1B_1C_1D_1$, và ở đó mỗi mặt bên của nó đều là những hình thang cân bằng nhau.

2. CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH, THỂ TÍCH

Với hình chóp cụt đều, ta có:

a. Diện tích xung quanh:

$$S_{xq} = \frac{1}{2}(p + p')d$$

trong đó:

- p và p' lần lượt là chu vi hai đáy
- d là đường cao của mặt bên.

b. Thể tích:

$$V_{\text{chóp cụt}} = \frac{1}{3}h.(B + B' + \sqrt{BB'})$$

trong đó:

- B, B' là diện tích các đáy
- h là độ dài đường cao.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: (Bài 57/tr 129 – Sgk): *Thể tích của hình chóp đều, hình chóp cụt* (*Hình ở sgk và* $\sqrt{3} \approx 1,73$)

✍ *Giải*

Hình a) là hình chóp đều có đáy là tam giác đều cạnh 10cm, suy ra:

$$S_{\text{đáy}} = \frac{10^2\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}\ (cm^2).$$

Thể tích hình chóp này là:

$$V = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3}.25.\sqrt{3}.20 \approx 288,33\ (cm^3).$$

Hình b) là một hình chóp cụt có:

$$V = V_{L.ABCD} - V_{L.EFGH} = \frac{1}{3}.20^2.30 - \frac{1}{3}10^2.15 = 3500\ (cm^3).$$

Ví dụ 2: (Bài 59/tr 129 – Sgk): *Tính thể tích của hình sgk với các kích thước kèm theo.*

✍ *Giải*

Ta thấy, thể tích của hình bằng tổng của thể tích hình lăng trụ đứng và hình chóp cụt.

Ta có:

- Thể tích hình lăng trụ đứng:

$$V_1 = 3.3.6 = 54\ (cm^2).$$

- Thể tích hình chóp cụt:

$$V_2 = \frac{1}{3}[(7,5)^3 - (3)^2] \approx 131,63\ (m^3)$$

Vậy, thể tích của hình cần tính là:

$$V = V_1 + V_2 = 185,63\ (m^3).$$

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho hình chóp tam giác đều SABC có các cạnh bằng a. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC.

a. Chứng tỏ rằng hình $ABCA_1B_1C_1$ là hình chóp cụt đều.

b. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình chóp cụt đều $ABCA_1B_1C_1$.

c. Tính tỉ số thể tích giữa hình chóp cụt đều $ABCA_1B_1C_1$ và hình chóp SABC.

Bài 2: Cho hình chóp tam giác đều SABCD có các cạnh bằng a. Gọi A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD.

a. Chứng tỏ rằng hình $ABCDA_1B_1C_1D_1$ là hình chóp cụt đều.

b. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình chóp cụt đều $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

c. Tính tỉ số thể tích giữa hình chóp cụt đều $ABCDA_1B_1C_1D_1$ và hình chóp SABCD.

MỤC LỤC

PHẦN ĐẠI SỐ

CHƯƠNG III. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

CHƯƠNG IV. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

PHẦN II - HÌNH HỌC

CHƯƠNG III. TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

CHƯƠNG IV. HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG - HÌNH CHÓP ĐỀU